



# DEVELOPPEMENT DE METHODES DE VOLUMES FINIS POUR LA MECANIQUE DES FLUIDES

Sarah Delcourte

## ► To cite this version:

Sarah Delcourte. DEVELOPPEMENT DE METHODES DE VOLUMES FINIS POUR LA MECANIQUE DES FLUIDES. Mathématiques [math]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2007. Français. NNT: . tel-00200833

**HAL Id: tel-00200833**

**<https://theses.hal.science/tel-00200833>**

Submitted on 21 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE TOULOUSE III - PAUL SABATIER**

UFR MIG, Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique

**THESE**

en vue de l'obtention du

**DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE**

délivré par l'Université Toulouse III - Paul Sabatier

**Spécialité : Mathématiques Appliquées**

soutenue par

**Sarah DELCOURTE**

le 26 septembre 2007

**Développement de méthodes de  
volumes finis pour la mécanique des  
fluides**

devant le jury composé de :

Directeur de thèse :

**Komla DOMELEVO** Maître de conférence à l'Université Paul Sabatier,  
habilité à diriger les recherches

Encadrant au CEA :

**Pascal OMNES** Ingénieur de recherche au CEA de Saclay

Rapporteurs :

**Franck BOYER** Professeur à l'Université de Marseille

**François DUBOIS** Professeur au CNAM

Examineurs :

**Robert EYMARD** Professeur à l'Université de Marne la Vallée

**David TRUJILLO** Maître de conférence à l'Université de Pau

**Jean-Paul VILA** Professeur à l'Université Paul Sabatier



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier tous ceux sans qui cette thèse n'aurait pu avoir lieu, à commencer par **Thierry Goudon** qui m'a recommandée auprès de **Pascal Omnes** et **Komla Domelevo**, qui m'ont fait confiance en me proposant ce sujet de thèse. **Jacques Segré**, **Juliette Cahen** et d'autres se sont également investis pour obtenir un financement auprès du CEA, qu'ils en soient remerciés.

Je tiens vivement à remercier **Komla Domelevo**, directeur de thèse, pour avoir supervisé cette thèse depuis Toulouse, pour son enthousiasme et sa confiance tout au long de cette thèse. J'ai beaucoup apprécié ses qualités humaines.

Toute ma reconnaissance va à **Pascal Omnes**, encadrant au CEA, pour avoir supervisé cette thèse au quotidien, pour sa gentillesse, sa patience et sa disponibilité. Ce fut pour moi un réel plaisir de travailler avec lui.

Merci aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail : en particulier, merci à **Franck Boyer** et à **François Dubois** qui ont accepté la charge de rapporteurs et pour la pertinence de leurs remarques. Je remercie également les examinateurs **Robert Eymard**, **David Trujillo** et **Jean-Paul Vila** de me faire l'honneur de juger mon travail.

Je tiens également à remercier **Delphine Jennequin** avec laquelle j'ai beaucoup appris sur les préconditionneurs et pour m'avoir initié à SPARSKIT2 et à PETSC.

Je remercie chaleureusement tous les **membres du LMPE** qui ont contribué à rendre agréable mon séjour au CEA, par leur sympathie, nos réunions de couloir et la bonne ambiance qu'ils ont apportée : Jean-Christophe Brémenson, Frédérique Charles, Siham Layouni, Jean-Luc De Palacio, Christian Gonella, Evelyne Macanda, Mireille Plonquet, Philippe Roblin, Jacques Segré, Christian Van Vambeke, ainsi que les stagiaires rencontrés : Steven Lenestour, Laurent N'Guyen, Stéphane Mamadou, Hélène Flament, Sylvaine Franck-Roye, Yohan Penel, Olivier et Yann Rosenbaum.

Je dédicace cette thèse à **mes parents, mon frère, Jo, Le Mez** et à tous mes amis du Nord (Pitchoune, Céline, Sarah, Abel, Marieke, Monsieur Julien, Audrey, Fred, Boro, Claire...) pour leur soutien constant et tout ce qu'ils m'ont apporté durant cette thèse, et même bien avant.

Enfin, je remercie **Phi** pour son z'amour, pour avoir fait le z'esclave pendant que je rédigeais, pour avoir pris en pension le Panpan qui a tout détruit sur son passage et pour tout le bonheur qu'il m'apporte. J'ai une pensée également pour sa famille.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Définitions, notations et opérateurs différentiels</b>	<b>33</b>
2.1	Construction des maillages primal, dual et diamant. . . . .	33
2.1.1	Construction du maillage primal . . . . .	33
2.1.2	Construction du maillage dual . . . . .	34
2.1.3	Construction du maillage diamant . . . . .	35
2.1.4	Définitions des éléments géométriques . . . . .	35
2.1.5	Définitions des produits scalaires et des normes discrètes et continues .	37
2.2	Construction des opérateurs discrets . . . . .	38
2.2.1	Construction des opérateurs gradient et rotationnel vecteur discrets sur les cellules-diamants . . . . .	39
2.2.2	Construction des opérateurs divergence, rotationnel scalaire discrets sur les maillages primal et dual. . . . .	41
2.3	Propriétés des opérateurs . . . . .	43
2.3.1	Formules de Green discrètes . . . . .	43
2.3.2	Composition des opérateurs discrets . . . . .	44
2.3.3	Décomposition de Hodge . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Le problème Div-Rot</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Solution numérique du problème div-rot pour des domaines non simplement connexes . . . . .	56
3.2.1	Discrétisation du problème div-rot avec conditions normales au bord . .	56

3.2.2	Le problème div-rot avec conditions tangentielles au bord . . . . .	60
3.2.3	Estimations d'erreur pour le problème div-rot . . . . .	62
3.3	Résultats numériques . . . . .	78
3.3.1	Maillages non-structurés . . . . .	78
3.3.2	Maillages non-conformes . . . . .	78
3.3.3	Maillages dégénérés . . . . .	81
3.3.4	Maillages non-simplement connexes . . . . .	82
3.3.5	Maillages non-convexes et solutions moins régulières . . . . .	82
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Singularités pour le Laplacien</b>	<b>85</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Problème de Laplace discret . . . . .	88
4.3	Estimations d'erreur . . . . .	90
4.3.1	Principaux résultats . . . . .	90
4.3.2	Majoration préliminaire . . . . .	92
4.3.3	Résultats sur le triangle de référence $\hat{\mathcal{T}}$ . . . . .	93
4.3.4	Résultats similaires sur un triangle $\mathcal{T}_{j,\gamma}$ par un changement de variables . . . . .	95
4.3.5	Preuve du théorème 4.2 . . . . .	98
4.4	Résultats numériques . . . . .	100
4.4.1	Maillages non-structurés sans raffinement local . . . . .	100
4.4.2	Maillages structurés avec un raffinement local approprié . . . . .	101
4.4.3	Maillages non-structurés avec un raffinement local approprié . . . . .	103
4.5	Conclusion . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Le problème de Stokes</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Application au problème de Stokes . . . . .	111
5.2.1	Discretisation des équations de Stokes en formulation tourbillon-vitesse-pression. . . . .	111
5.2.2	Discretisation des équations de Stokes en formulation vitesse-pression . . . . .	116
5.2.3	Discretisation des équations de Stokes avec des conditions mixtes . . . . .	120
5.3	Résultats numériques . . . . .	124

5.3.1	Conditions aux limites non-standard et formulation tourbillon-vitesse-pression . . . . .	126
5.3.2	Conditions aux limites standard et formulation vitesse-pression . . . . .	129
5.3.3	Conditions aux limites mixtes . . . . .	139
5.4	Conclusion . . . . .	143
<b>6</b>	<b>Le schéma dual pour Stokes</b>	<b>145</b>
6.1	Introduction . . . . .	145
6.2	Discrétisation du problème . . . . .	147
6.3	Existence et unicité de la solution dans le cas de triangles conformes . . . . .	148
6.4	Équivalence avec une méthode d'éléments finis non-conformes . . . . .	153
6.5	Calcul de la fonction de courant $\psi$ . . . . .	156
6.6	Décomposition de Hodge . . . . .	157
6.7	Résultats numériques . . . . .	157
6.7.1	Maillages non-structurés. . . . .	158
6.7.2	Maillages fortement non-conformes . . . . .	158
6.7.3	Maillages avec une non-conformité locale. . . . .	160
6.7.4	Maillages non-simplement connexes. . . . .	160
6.7.5	Conclusion . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Extension au problème de Navier-Stokes et préconditionnement</b>	<b>163</b>
7.1	Introduction . . . . .	163
7.2	Discrétisation des équations de Navier-Stokes . . . . .	167
7.2.1	Résolution du problème d'Oseen . . . . .	167
7.2.2	Écriture des matrices . . . . .	170
7.2.3	Problème non-linéaire . . . . .	172
7.3	Préconditionnement du problème de point-selle . . . . .	173
7.3.1	La méthode d'Uzawa . . . . .	173
7.3.2	Préconditionneurs . . . . .	173
7.4	Résultats numériques . . . . .	176
7.4.1	Résultats numériques pour le problème d'Oseen . . . . .	177
7.4.2	Résultats numériques pour le problème de Navier-Stokes . . . . .	180
7.4.3	Résultats numériques pour le préconditionnement . . . . .	184



## TABLE DES MATIÈRES

---

7.5 Conclusion . . . . .	200
<b>Perspectives</b>	<b>203</b>

# Table des figures

1.1	Deux cellules voisines d'un maillage admissible. . . . .	17
1.2	Différentes partitions du domaine. . . . .	18
1.3	Un maillage primal et son dual associé. . . . .	19
1.4	Reconstruction du gradient sur la cellule-diamant. . . . .	20
1.5	Maillage de Delaunay-Voronoi. . . . .	23
1.6	Maillages rectangulaires. . . . .	26
2.1	Un exemple de maillage primal et de son maillage dual associé. . . . .	34
2.2	Exemples de cellules-diamants. . . . .	35
2.3	Notations pour la cellule-diamant. . . . .	36
2.4	Définitions de $\tilde{A}_k$ et $\tilde{\mathbf{n}}_k$ pour les noeuds frontières. . . . .	36
2.5	Une cellule-diamant peut se diviser en deux triangles de deux manières distinctes. . . . .	37
2.6	Supports pour les opérateurs discrets. . . . .	39
2.7	Deux possibilités d'orientation pour chaque arête. . . . .	44
2.8	La surface de la cellule-diamant $D_j$ . . . . .	45
2.9	Notations pour les cellules duales frontières. . . . .	47
3.1	Notations pour le paragraphe 3.2.3. . . . .	62
3.2	Maillages triangulaires non-structurés. . . . .	79
3.3	Erreur en norme $L^2$ . . . . .	79
3.4	Maillages carrés non-conformes. . . . .	80
3.5	Erreur en norme $L^2$ . . . . .	80
3.6	Zoom sur une cellule-diamant pour les maillages en damier avec $n = 2$ . . . . .	80
3.7	Maillages triangulaires dégénérés. . . . .	81
3.8	Erreur en norme $L^2$ . . . . .	81

3.9	Maillages non-simplement connexes. . . . .	82
3.10	Erreur en norme $L^2$ . . . . .	83
3.11	Maillages non-convexes. . . . .	83
3.12	Erreur en norme $L^2$ . . . . .	84
4.1	Le domaine $\Omega$ avec un unique coin. . . . .	86
4.2	Angle entre les diagonales d'une cellule-diamant. . . . .	90
4.3	Maillages non-structurés. . . . .	101
4.4	Erreurs de $\nabla\psi$ et $\nabla\phi$ dans la norme $L^2$ pour des maillages non-structurés. . .	101
4.5	Construction d'un triangle $\alpha$ -raffiné, avec $\alpha = \frac{2}{3}$ , dont les sommets sont $(0, 0)$ , $(1, 0)$ et $(0, 1)$ avec $n = 4$ . . . . .	102
4.6	Maillages structurés $\alpha$ -raffinés avec $n = 4$ et $n = 8$ . . . . .	103
4.7	Erreurs de $\nabla\psi$ et $\nabla\phi$ en norme $L^2$ pour les maillages structurés $\alpha$ -raffinés. . .	104
4.8	Maillages $\alpha$ -raffinés non-structurés avec $n = 2$ et $n = 4$ . . . . .	104
4.9	Erreurs de $\nabla\psi$ et $\nabla\phi$ en norme $L^2$ pour les maillages $\alpha$ -raffinés non-structurés.	104
5.1	(a) Maillage triangulaire. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur sur le gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4). . . . .	127
5.2	(a) Maillage non-conforme. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur sur le gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4). . . . .	128
5.3	(a) Maillage non-conforme. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur du gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4). . . . .	129
5.4	Maillages triangulaires non-structurés. . . . .	130
5.5	Maillages avec une non-conformité au centre. . . . .	130
5.6	Maillages fortement non-conformes. . . . .	130

5.7	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non structurés (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	131
5.8	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages localement non-conformes (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	132
5.9	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non-conformes (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	133
5.10	(a) Profil de vitesse horizontal selon $y$ en $x = 0.5$ . (b) Profil de vitesse vertical selon $x$ en $y = 0.5$ . . . . .	134
5.11	(a) Vecteur vitesse $\mathbf{u}$ . (b) Lignes de niveaux de la pression $p$ . (c) Lignes de niveaux de la vorticité $\omega$ . (d) Lignes de niveaux de la fonction de courant $\psi$ pour une cavité carrée unitaire. . . . .	135
5.12	évolution de la fonction de courant $\psi$ concernant les tourbillons de coins pour (a) $D = 1.6$ , (b) $D = 1.7$ , (c) $D = 1.8$ et (d) $D = 1.9$ . . . . .	137
5.13	(a) Profil de vitesse $v(x, y = 0)$ pour un maillage non-structuré. (b) Profil de vitesse $v(x, y = 0)$ pour un maillage symétrique selon l'axe $y = 0$ . . . . .	138
5.14	Comparaison des profils de vitesse $u(x = 0, y)$ . . . . .	139
5.15	(a) Vecteur vitesse $\mathbf{u}$ . (b) Lignes de niveaux de la pression $p$ . (c) Lignes de niveaux de la vorticité $\omega$ . (d) Lignes de niveaux de la fonction de courant $\psi$ pour un maillage non-structuré qui est symétrique par rapport à l'axe horizontal $y = 0$ . . . . .	140
5.16	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non structurés (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	141
5.17	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages avec une non-conformité au centre (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	142
5.18	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages fortement non-conformes (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	143

6.1	Unicité de la pression sur une grille uniforme $3 \times 3$ . . . . .	151
6.2	Valeurs de la pression sur une cellule primale (ou duale intérieure) lorsque le gradient discret est nul sur celle-ci. . . . .	152
6.3	Valeurs de la pression sur une cellule duale frontière lorsque le gradient discret est nul sur celle-ci. . . . .	153
6.4	Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-structurés. . . . .	159
6.5	Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-conformes en damier. . . . .	159
6.6	Maillages raffinés au centre. . . . .	160
6.7	Convergence de la vitesse, de la pression et de leurs gradients respectifs pour des maillages raffinés au centre. . . . .	161
6.8	Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-simplement connexes. . . . .	161
7.1	Convergence de la vitesse, de la pression de Bernoulli et de la vorticité pour le problème d'Oseen avec $\nu = 1$ sur des maillages non structurés (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	178
7.2	Convergence de la vitesse, de la pression de Bernoulli et de la vorticité pour le problème d'Oseen avec $\nu = 1$ sur des maillages localement non-conformes (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . (d) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_2$ . . . . .	179
7.3	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec $\nu = 1$ sur des maillages non structurés (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . . . . .	180
7.4	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec $\nu = 1$ sur des maillages raffinés localement (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . . . . .	181
7.5	Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec $\nu = 1$ sur des maillages en damier (a) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_1$ . (b) $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$ sur $\Omega_2$ . (c) $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$ sur $\Omega_1$ . . . . .	182
7.6	Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour $\nu = 1$ . . . . .	183

7.7	Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour $\nu = 0.1$ . . . . .	183
7.8	Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour $\nu = 0.02$ . . . . .	183
7.9	Profiles selon $y$ en $x = 0.5$ et selon $x$ en $y = 0.5$ avec $\nu = 1.0$ pour des grilles structurées $32 \times 32$ et $128 \times 128$ . . . . .	184
7.10	$\nu = 1$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d'Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	186
7.11	$\nu = 1$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman, $M_2 = I$ . (b) Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman, $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	186
7.12	$\nu = 0.1$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d'Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	187
7.13	$\nu = 0.1$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman, $M_2 = I$ . (b) Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman, $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	187
7.14	$\nu = 0.01$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d'Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	188
7.15	$\nu = 0.01$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman, $M_2 = I$ . (b) Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman, $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	188
7.16	$\nu = 0.001$ . En haut à gauche : Spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d'Elman, $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d'Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	189
7.17	$\nu = 0.001$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman, $M_2 = I$ . (b) Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman, $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE. . . . .	189

7.18	$\nu = 1$ . (a) Complément de Schur pour le problème de Stokes. (b) Préconditionneur d'Elman avec $M_2 = I$ pour le problème de Stokes. . . . .	190
7.19	Spectre du complément de Schur pour le problème de Stokes preconditionné par (a) Elman, $M_2 = I$ . (b) Elman, $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman, $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. . . . .	190
7.20	Comparaison du coût itératif en fonction de $1/h$ pour le preconditionneur BFBt.	193
7.21	Comparaison du coût itératif en fonction de $1/\nu$ pour le preconditionneur BFBt.	193
7.22	Résidus pour un maillage $80 \times 80$ non-structuré (a) $\nu = 1$ (b) $\nu = 0.1$ (c) $\nu = 0.01$ (d) $\nu = 0.001$ . . . . .	200

# Liste des tableaux

2.1	Liste des notations. . . . .	51
5.1	Localisations des centres des tourbillons et valeurs de la fonction de courant $\psi$ obtenues par Shankar [102] et par la méthode DDFV pour différentes profondeurs.	136
5.2	Localisations des tourbillons primaires de coins et valeurs de la fonction de courant obtenues par Shankar [102] et par la méthode DDFV pour différentes profondeurs. . . . .	138
7.1	Algorithme non-linéaire. . . . .	172
7.2	Pseudo-code pour l'algorithme du Bicgstab préconditionné. . . . .	174
7.3	Coût itératif pour le solveur linéaire. . . . .	192
7.4	Nombre d'itérations avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2. . . . .	196
7.5	Temps en seconde(s) avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2. . . . .	197
7.6	Nombre d'itérations avec la factorisation ILU0 de SPARSKIT2. . . . .	198
7.7	Temps en seconde(s) avec la factorisation ILU0 de SPARSKIT2. . . . .	199
7.8	Nombre d'itérations moyen pour inverser la matrice $B\Pi B^T$ sur un maillage non-structuré $80 \times 80$ avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2. . . . .	200
7.9	Nombre d'itérations non-linéaires pour résoudre le problème de Navier-Stokes (Nombre d'itérations moyen pour résoudre le problème d'Oseen avec une tolérance de $10^{-1}$ à chaque itération non-linéaire). . . . .	201





# Chapitre 1

## Introduction

L'objectif de cette thèse était d'améliorer un code de mécanique des fluides 2D écrit avec une méthode de volumes finis, le schéma MAC que nous décrirons plus loin, pour des maillages rectangulaires. En effet, les méthodes de volumes finis classiques sont construites sur des maillages vérifiant des propriétés d'orthogonalité, comme les maillages rectangulaires [58], les maillages de Delaunay-Voronoi [82] ou encore les maillages dits admissibles [48] (voir figure 1.1), qui peuvent être vus comme une généralisation des précédents. Pour illustrer

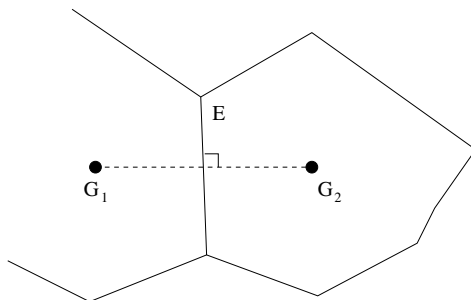


FIG. 1.1 – Deux cellules voisines d'un maillage admissible.

ces conditions d'orthogonalité, nous allons décrire succinctement la méthode de [48] sur le problème de Laplace en nous plaçant sur un maillage admissible. Un maillage est dit admissible s'il est possible d'associer à chaque cellule un point de contrôle de telle sorte que le segment joignant les points de contrôle de deux cellules voisines soit orthogonal à l'arête commune de ces deux cellules. Les inconnues du schéma [48] sont associées aux points de contrôle des

mailles et on intègre l'équation  $-\Delta\phi = f$  sur un volume de contrôle  $K$  :

$$\int_K f = \int_K -\nabla \cdot \nabla \phi \quad (1.1)$$

$$= - \int_{\partial K} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \quad (1.2)$$

$$= - \sum_{E \in \partial K} |E| [\nabla \phi \cdot \mathbf{n}]_E. \quad (1.3)$$

Il faut donc évaluer  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  sur chaque arête  $E$  du maillage. Puisque le segment joignant les points de contrôle de deux mailles adjacentes est orthogonal à l'arête commune  $E$ , alors la valeur de  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  sur cette interface peut aisément être approchée par une différence finie :

$$[\nabla \phi \cdot \mathbf{n}]_E \approx \frac{\phi(G_2) - \phi(G_1)}{|G_1 G_2|}.$$

Cette méthode est très performante sur les maillages que nous avons cités, et peu coûteuse. En revanche, il devient difficile de l'appliquer à des maillages triangulaires non-structurés en général car le centre du cercle circonscrit peut se trouver en dehors de la cellule lorsque celle-ci est déformée (Fig. 1.2 a) (on pourra se référer aux tests numériques effectués dans [40] sur des maillages très aplatis). De plus, elle n'est pas du tout adaptée aux maillages non conformes (Fig. 1.2 b), puisqu'ils ne remplissent pas les conditions d'orthogonalité. Pourtant,

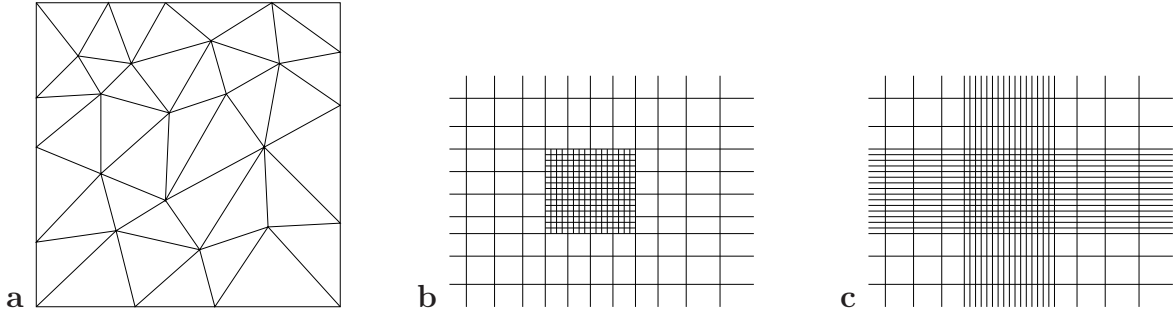


FIG. 1.2 – Différentes partitions du domaine.

ces maillages sont parfois bien utiles pour capter des singularités locales. Ainsi, plutôt que d'utiliser le maillage de la figure 1.2 b directement, il est alors nécessaire de raffiner (Fig. 1.2 c) sur l'ensemble du domaine lorsqu'on veut une bonne approximation locale, ce qui augmente inutilement le nombre d'inconnues et donc le temps de calcul. Dans la suite, nous allons présenter une méthode de volumes finis qui s'affranchit de ces contraintes d'orthogonalité. Pour cela, on considère une partition du domaine de calcul  $\Omega$  (le maillage primal), formée

de polygones convexes, et on construit une deuxième partition (le maillage dual) centrée sur les sommets du maillage primal, qu'on obtient en joignant les centres de gravité voisins par exemple, comme sur la figure 1.3. Pour donner, dans cette introduction, une idée du

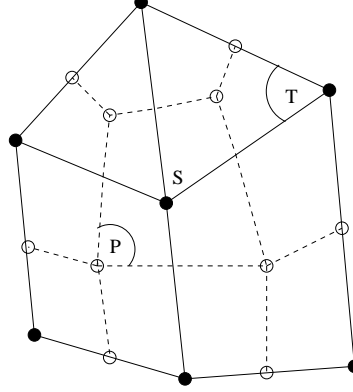


FIG. 1.3 – Un maillage primal et son dual associé.

fonctionnement de cette méthode de volumes finis [40], on va tout d'abord se positionner sur le problème de Laplace et chercher à résoudre  $-\Delta\phi = f$ , avec comme inconnues des  $\phi^T$  discrets situés au centre de gravité des polygones, ainsi que des  $\phi^P$  situés aux sommets. On obtient le même nombre d'équations en intégrant l'équation sur les cellules primales et sur les cellules duales. Considérons une cellule primaire  $T$ , dont un des sommets est noté  $S$ , et construisons la cellule duale  $P$  associée à ce sommet, comme sur la figure 1.3. Lorsqu'on intègre l'équation sur  $T$  :

$$-\sum_{A \in \partial T} |A| [\nabla\phi \cdot \mathbf{n}]_A = \int_T f, \quad (1.4)$$

nous sommes ramenés au calcul de la composante normale de  $\nabla\phi$ , notée  $\nabla\phi \cdot \mathbf{n}$ , sur chacune des arêtes  $A$  de  $T$ . De même, en intégrant l'équation sur  $P$ , nous sommes ramenés au calcul de la composante normale de  $\nabla\phi$  sur chacune des arêtes  $A'$  de  $P$  :

$$-\sum_{A' \in \partial P} |A'| [\nabla\phi \cdot \mathbf{n}]_{A'} = \int_P f. \quad (1.5)$$

Sur la figure 1.4, nous avons représenté un quadrilatère  $D$ , appelé cellule-diamant, dont l'une des diagonales  $A$  est une arête du maillage primal, tandis que l'autre diagonale  $A'$  est une arête du maillage dual. Finalement, d'après (1.4) et (1.5), intégrer  $-\Delta\phi = f$  sur les cellules

primales et duales à la fois, revient à évaluer  $\nabla\phi$  selon deux directions dans chaque cellule-diamant  $D$  : la direction normale à  $A$  et la direction normale à  $A'$ . Comme dans [31], Komla Domelevo et Pascal Omnes [40] reconstruisent alors les deux composantes de  $\nabla\phi$  à partir des  $\phi^T$  et  $\phi^P$  situés aux sommets de ces cellules-diamants. L'originalité de leur démarche (voir aussi les travaux de F. Hermeline [61]) est de traiter les  $\phi^P$  comme inconnues supplémentaires du schéma, contrairement à [31] qui interpole les  $\phi^P$  en fonction des  $\phi^T$ . Ainsi, la méthode

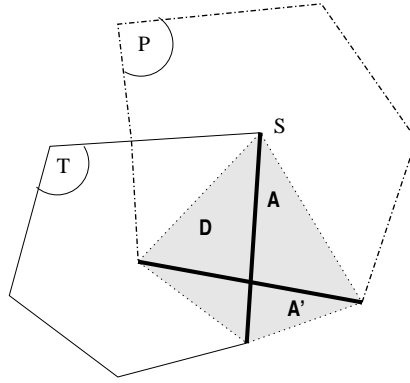


FIG. 1.4 – Reconstruction du gradient sur la cellule-diamant.

permet de s'affranchir des conditions d'orthogonalité très restrictives dont nous avons parlé précédemment, et qui impliquent l'utilisation de maillages particuliers tels que les maillages rectangulaires, de Delaunay-Voronoi ou les maillages dits admissibles. Cette méthode permet donc l'utilisation de maillages polygonaux arbitraires tels que les maillages non-structurés, non-conformes, aplatis..., ce qui permet de faire des raffinements locaux sans contrainte, d'où une plus grande flexibilité de la méthode et un gain en temps de calcul. Au cours de cette thèse, j'ai travaillé à l'extension de cette méthode à différents problèmes décrits dans les paragraphes suivants.

## Définitions, notations et opérateurs différentiels (Chapitre 2)

Dans ce chapitre, nous décrivons les grands principes et les principaux résultats de la méthode de volumes finis, appelée DDFV acronyme de “Discrete Duality Finite Volume” [35]. Cette méthode peut être vue comme une méthode de covolumes (au sens de Nicolaidis [82]) en 2D agissant sur trois grilles décalées que l'on nomme maillage primal, maillage dual

---

(centré sur les sommets du maillage primal) et maillage diamant (centré sur les arêtes du maillage primal), et pour lesquels nous donnons toutes les notations utiles pour les chapitres ultérieurs. Notons, de plus, que nous avons légèrement modifié la forme des cellules duales, par rapport à la construction originelle donnée par Komla Domelevo et Pascal Omnes dans [40] et donc par rapport à la figure 1.3. Avec cette nouvelle construction, les cellules duales forment nécessairement une partition, ce qui n'était pas toujours le cas auparavant. De plus, on observe, numériquement, de meilleurs ordres de convergence pour le problème de Stokes avec des conditions aux limites standard (voir Chapitre 5).

Le principe général de la méthode consiste à construire des opérateurs gradient, divergence et rotationnel discrets une fois pour toutes, puis de remplacer les opérateurs qui interviennent dans les EDP par leurs homologues discrets. Ces opérateurs agissent sur des maillages quelconques par un choix judicieux des inconnues.

Ainsi, nous construisons un opérateur gradient discret  $\nabla_h^D$  agissant sur les scalaires  $(\phi^T, \phi^P)$ , et à valeurs sur les cellules-diamants. Moyennant des produits scalaires discrets adéquats, cet opérateur est en dualité discrète avec l'opérateur divergence discrète  $\nabla_h^{T,P}$ , agissant sur des vecteurs  $\mathbf{u}^D$  définis sur les cellules-diamants, et à valeurs sur les cellules primales et duales :

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u}, \phi)_{T,P} = -(\mathbf{u}, \nabla_h^D \phi)_D + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \phi)_{\Gamma,h}.$$

De la même manière, nous construisons un opérateur rotationnel vecteur d'un scalaire  $\nabla_h^D \times$  agissant sur les scalaires  $(\phi^T, \phi^P)$ , et à valeurs sur les cellules-diamants. Cet opérateur est en dualité discrète avec l'opérateur rotationnel scalaire d'un vecteur  $\nabla_h^{T,P} \times$ , agissant sur des vecteurs  $\mathbf{u}^D$  définis sur les cellules-diamants et à valeurs sur les cellules primales et duales :

$$(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \phi)_{T,P} = (\mathbf{u}, \nabla_h^D \times \phi)_D + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, \phi)_{\Gamma,h}.$$

Ces opérateurs vérifient d'autres propriétés discrètes, analogues à celles des opérateurs continus. En effet, pour les opérateurs continus, les rotationnels de vecteurs sont à divergence nulle et les gradients sont à rotationnel nul. Au niveau discret, nous vérifions que :

$$\nabla_h^{T,P} \times \nabla_h^D \phi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \times \phi = 0.$$

D'autre part, par définition, nous avons également la relation suivante :

$$\nabla_h^{T,P} \times \nabla_h^D \times \phi = -\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \times \phi.$$

Enfin, dans le cas continu, la décomposition de Hodge pour les domaines simplement connexes s'écrit :

$$(L^2)^2 = \nabla V \oplus \nabla \times W ,$$

avec  $V = \{\phi \in H^1 : \int_{\Omega} \phi = 0\}$  et  $W = \{\psi \in H^1 : \psi|_{\Gamma} = 0\}$ . Au niveau discret, on établit une décomposition de Hodge analogue :

$$\mathbf{u}^D = (\nabla_h^D \phi) + (\nabla_h^D \times \psi)$$

avec  $\phi$  de moyenne discrète nulle sur les cellules primales et aussi sur les cellules duales ; et  $\psi$  nul au bord de  $\Omega$ . De plus, cette décomposition est orthogonale pour le produit scalaire  $L^2$  discret. Dans le chapitre 2, nous étendons cette décomposition aux domaines non-simplement connexes.

Ce qu'il faut également retenir de ce chapitre est que si on discrétise l'inconnue sur les cellules primales et duales à la fois, alors d'après le principe de dualité discret, on ne peut lui appliquer qu'un opérateur à valeurs sur les cellules-diamants. Inversement, si on discrétise l'inconnue sur les cellules-diamants, alors on ne peut que lui appliquer un opérateur à valeurs sur les cellules primales et duales à la fois.

## Le problème Div-Rot (Chapitre 3)

Dans ce chapitre, nous appliquons les idées du chapitre 2 pour discrétiser le problème divergence/rotationnel (ou Div-Rot pour simplifier) sur des domaines non-simplement connexes. Le problème Div-Rot est un problème sous-jacent pour les problèmes de mécanique des fluides mais aussi d'électromagnétisme, et nous verrons dans le chapitre 5 qu'il intervient pour montrer l'existence et l'unicité du problème de Stokes discret. Pour des domaines simplement connexes, il s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f, \quad \nabla \times \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega \text{ et } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma \text{ au bord.}$$

Nous allons présenter brièvement la méthode de Nicolaides [82] qui s'applique à des maillages de Delaunay-Voronoi (figure 1.5). On considère un maillage primal de Delaunay et on construit son maillage dual (maillage de Voronoi) centré sur les sommets en joignant les centres des cercles circonscrits situés autour, comme sur la figure 1.5. Par construction, toute

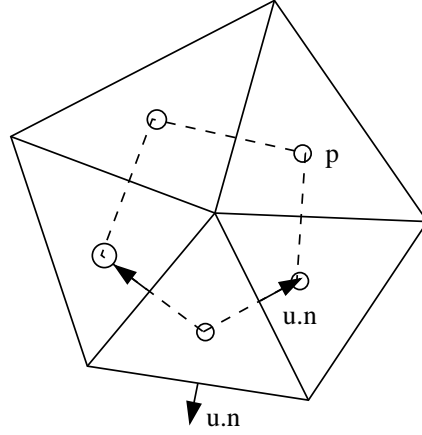


FIG. 1.5 – Maillage de Delaunay-Voronoi.

arête du maillage primal est orthogonale à une arête du maillage dual. Les inconnues sont les composantes normales de  $\mathbf{u}$  aux interfaces des cellules primales. Ainsi, lorsqu'on intègre l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{u} = f$  sur le maillage primal, cela revient à évaluer  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  aux interfaces du maillage primal. D'autre part, quand on intègre  $\nabla \times \mathbf{u} = g$  sur les cellules duales, cela revient à évaluer  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$  sur les interfaces des cellules duales, et par la propriété d'orthogonalité, cela vaut exactement  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  aux interfaces des cellules primales.

Dans ce chapitre, nous généralisons les travaux de Nicolaidis [82, 86] en discrétisant par  $\mathbf{u}^D$  les deux composantes de  $\mathbf{u}$  sur les cellules-diamants, et nous intégrons chacune des deux équations  $\nabla \cdot \mathbf{u} = f$  et  $\nabla \times \mathbf{u} = g$  sur les cellules primales  $T$  et les cellules duales  $P$  à la fois. La condition aux limites est, quant à elle, discrétisée sur les cellules-diamants  $D$  du bord.

En écrivant la décomposition de Hodge discrète de  $\mathbf{u}^D$  sur chacune des cellules-diamants en fonction des potentiels  $\phi$  et  $\psi$ , le schéma DDFV se découple en deux problèmes de type laplacien : un problème de Laplace d'inconnue  $\psi$  avec des conditions aux limites de Dirichlet, et un autre problème de Laplace d'inconnue  $\phi$  avec des conditions de Neumann au bord. On vérifie ensuite que  $\phi$  et  $\psi$  sont uniques, puis nous donnons des estimations d'erreurs sur ces potentiels. Grâce aux propriétés de la décomposition de Hodge de  $\mathbf{u}$ , on en déduit alors l'estimation d'erreur suivante entre la solution discrète  $\mathbf{u}^D$  et la solution continue  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $h$  étant le pas du maillage primal :

**Théorème :** Sous certaines hypothèses, il existe une constante  $C(\tau^*)$  indépendante du



maillage diamant telle que

$$\left( \sum_{D \subset \Omega} \int_D |\mathbf{u}^D - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \leq C(\tau^*)h \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} + \|\hat{\phi}\|_{2,\Omega} + \|\hat{\psi}\|_{2,\Omega} \right).$$

L'extension aux domaines non-simplement connexes a aussi été étudiée. Enfin, des résultats numériques illustrent l'utilisation de la méthode sur différents types de maillages, parmi lesquels des maillages triangulaires aplatis ou des maillages avec des raffinements non-conformes locaux. Numériquement, on constate que  $\mathbf{u}$  converge à l'ordre 1 (resp. 1.5) pour des maillages non-structurés et non-conformes (resp. structurés aplatis) lorsque les solutions du problème continu sont suffisamment régulières.

## Singularités pour le Laplacien (Chapitre 4)

Ce chapitre porte sur la résolution du problème de Laplace avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet et de Neumann dans des domaines présentant des singularités tels que les domaines non-convexes polygonaux. On sait que quand le domaine  $\Omega$  est régulier, alors les solutions du laplacien sont régulières [30] et appartiennent à l'espace de Sobolev  $H^2(\Omega)$ , si  $f \in L^2(\Omega)$ .

Cependant, en pratique,  $\Omega$  est rarement convexe et il est bien connu [57] que cela conduit à des singularités de la solution au voisinage des coins rentrants de  $\Omega$ . Ainsi, la solution n'appartient plus à  $H^2(\Omega)$  mais à  $H^{1+s}(\Omega)$  (avec  $s < \frac{\pi}{\omega}$  où  $\omega$  est l'angle intérieur maximal du polygone  $\Omega$ ) et il est nécessaire d'introduire de nouveaux espaces que l'on appelle espaces de Sobolev à poids sur lesquels nous allons faire l'analyse de convergence.

Bien évidemment, cette perte de régularité conduit à une perte de l'ordre de convergence pour les techniques de discrétisations standard. En effet, d'après [56], une suite quasi-uniforme de triangulations de  $\Omega$  ne conduit pas à un taux de convergence optimal pour l'approximation de Galerkin de la solution. De plus, en traitant le problème Div-Rot dans le chapitre 3, on a également constaté une dégradation de l'ordre de convergence sur des domaines polygonaux non-convexes (voir les résultats numériques).

Le but de ce chapitre est donc d'étudier un raffinement local approprié du maillage primal au voisinage de la singularité, comme cela a été fait dans [97, 56, 39], principalement pour les méthodes d'éléments finis. L'originalité de ce chapitre est l'adaptation de cette technique aux

---

volumes finis, point de vue qui a été très peu étudié (voir [39]). D'autre part, à la différence de [97, 56, 39], nous faisons l'analyse de convergence sur les cellules-diamants, et non sur le maillage primal. En effet, nous estimons l'erreur discrète en semi-norme  $H^1$ , commise entre la solution discrète  $\phi$  et la solution continue  $\widehat{\phi}$  prise aux sommets et aux centres de gravité grâce à l'opérateur  $\Pi$  de la définition 4.1. Ainsi, nous montrons le théorème suivant qui est analogue au résultat [40, théorème 5.13] pour des domaines non-convexes :

**Théorème :** Sous certaines hypothèses sur le maillage diamant, il existe  $C(\theta^*) > 0$  tel que :

$$|\phi - \Pi\widehat{\phi}|_{1,D} \leq C(\theta^*) h \left| \widehat{\phi} \right|_{H^{2,\alpha}(\Omega)},$$

où l'angle  $\theta^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$  est tel que les angles entre les diagonales des cellules-diamants soient plus grand que  $\theta^*$ .

On vérifie que le maillage diamant issu du raffinement local, agissant sur le maillage primal, proposé par [97] satisfait bien les hypothèses de ce théorème.

Enfin, nous donnons des résultats numériques sur des domaines non-convexes avec ou sans ce raffinement local, et on observe que l'ordre de convergence optimal, c'est à dire l'ordre 1, est rétabli avec ce raffinement au voisinage du coin rentrant.

## Le problème de Stokes (Chapitre 5)

Dans ce chapitre, nous présentons une application de la méthode DDFV pour la résolution des équations de Stokes 2D :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega, \quad (1.7)$$

complétées soit par une condition sur la vitesse et une condition sur la pression

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0,$$

soit par une des conditions moins standard énoncées ci-dessous

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \omega_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad p = p_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} \omega = m_{\omega},$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \omega_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0,$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad p = p_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} \omega = m_{\omega},$$

où  $\mathbf{f}$ ,  $g$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma$ ,  $p_d$  et  $\omega_d$  sont des fonctions données et  $m_{\omega}$  est un nombre réel. Ces conditions au bord sont écrites ici dans le cas des domaines simplement connexes pour plus de simplicité mais elles seront étendues dans le chapitre 5 à des domaines non-simplement connexes.

Nous présentons brièvement le schéma MAC (Marker and Cell) qui s'applique à des maillages rectangulaires décalés (voir figure 1.6). Les inconnues de vitesse sont les composantes normales de  $\mathbf{u}$  aux interfaces du maillage primal, tandis que les inconnues de pression sont situées au centre des mailles. Ensuite, la composante normale de (1.6) est intégrée sur les volumes de contrôle décalés centrés sur les arêtes, comme sur la figure 1.6. Une simple différence finie est utilisée pour évaluer les dérivées de  $\mathbf{u}$  aux interfaces des cellules décalées, tandis que les inconnues de pression  $p$  sont déjà situées à ces interfaces, c'est pourquoi on les utilise directement. Enfin, l'équation (1.7) est intégrée sur les cellules primales, faisant intervenir les composantes normales de  $\mathbf{u}$ . Nous allons étudier une extension du schéma MAC classique sur

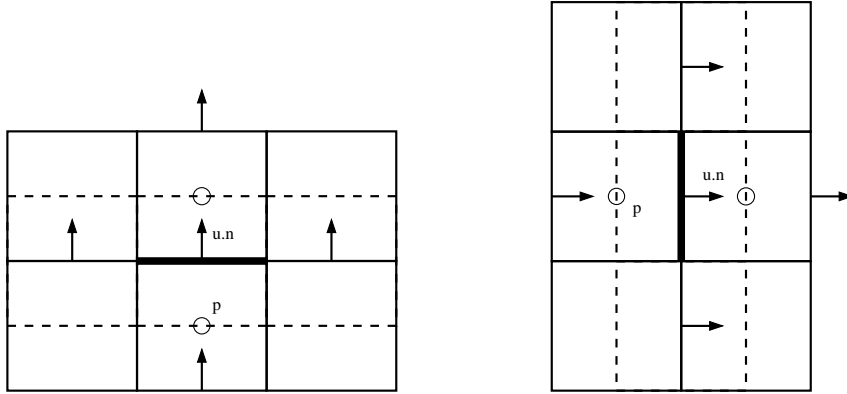


FIG. 1.6 – Maillages rectangulaires.

des maillages presque arbitraires grâce à un choix approprié des degrés de liberté. Pour cela, nous discrétisons les inconnues de vitesse  $\mathbf{u}$  sur les cellules-diamants, tandis que les inconnues de pression  $p$  et de vorticité  $\omega$  sont discrétisées sur les cellules primales et duales à la fois. Ainsi, par le principe de dualité discrète, on intègre  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$  sur les cellules-diamants, tandis que l'équation  $\nabla \cdot \mathbf{u} = g$  est intégrée sur les cellules primales et duales.

---

D'autre part, nous utilisons la formulation rotationnelle du laplacien vectoriel, qui s'écrit :

$$-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

ce qui nous conduit à utiliser soit la formulation classique du problème de Stokes appelée "vitesse-pression", soit sa formulation "tourbillon-vitesse-pression" selon le type de conditions au bord.

L'existence et l'unicité du problème discret se montrent en faisant apparaître un problème Div-Rot provenant de  $\nabla \cdot \mathbf{u} = g$  et de  $\nabla \times \mathbf{u}$  apparaissant dans la formulation rotationnelle du laplacien. Dans le cas des conditions aux limites non-standard, le schéma discret se découple en deux problèmes de Laplace faisant intervenir la pression  $p$  et la vorticité  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ , ainsi qu'un problème Div-Rot d'inconnue la vitesse  $\mathbf{u}$ . Par conséquent, l'analyse de convergence pour les conditions non-standard se déduit du chapitre 3. Par contre, nous n'avons pas pu établir pour l'instant de condition Inf-Sup uniforme pour la condition aux limites  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}$  compte tenu du principe de dualité discrète de la méthode qui, dans ce cas, complique sévèrement l'analyse.

L'efficacité du schéma est illustrée sur des maillages non-structurés ou non-conformes. Pour le cas des conditions non-standard, les ordres de convergence obtenus sont conformes à ceux de [40, 36], c'est à dire 2 pour la pression et la vorticité, 1 pour leurs gradients et 1 pour la vitesse, lorsque les solutions continues sont suffisamment régulières. Pour les conditions aux limites standard, on observe que la vitesse converge à l'ordre 2, tandis que la pression et la vorticité convergent au moins à l'ordre 1 sur des maillages triangulaires non-structurés ou non-conformes localement. En revanche, sur des maillages fortement non-conformes, la vitesse converge au moins à l'ordre 1 et la pression au moins à l'ordre 0.5 lorsque les solutions continues sont suffisamment régulières. De plus, nous validons la présente méthode pour des écoulements dans des cavités rectangulaires et une cavité circulaire à paroi défilante. Nous étudions aussi la formation des tourbillons pour différentes profondeurs de la cavité rectangulaire, et nous donnons leur localisation ainsi que leur amplitude au centre et aux coins de la cavité. Pour les conditions aux limites mixtes, les résultats numériques sont proches de ceux obtenus pour les conditions aux limites standard.

## Le schéma dual pour Stokes (Chapitre 6)

Ce chapitre est encore consacré au problème de Stokes, avec des conditions aux limites standard, mais on s'interroge cette fois sur la pertinence du schéma dual. En effet, dans le chapitre 5, nous avons choisi de discrétiser la vitesse sur les cellules-diamants et la pression sur les cellules primales et duales. Par définition du principe de dualité discrète de la méthode DDFV, ce choix nous a conduit à intégrer l'équation  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$  sur les cellules-diamants. On pourrait se demander pourquoi nous n'avons pas choisi le schéma dual, consistant à poser les inconnues de vitesse sur les cellules primales et duales, et les inconnues de pression sur les cellules diamants. Ainsi, on aurait discrétisé l'opérateur laplacien sur les cellules primales et duales, comme dans [40] et le chapitre 3 de cette thèse, ce qui a donné d'excellents résultats. Dans cette configuration, on montre que ce schéma est équivalent à une méthode d'éléments finis non-conformes. Numériquement, on obtient d'excellents résultats sur des maillages triangulaires non-structurés ou des grilles de carrés fortement non-conformes, puisque la vitesse  $\mathbf{u}$  converge à l'ordre 2, tandis que la pression  $p$  converge à l'ordre 1. Par contre, il présente aussi de très gros inconvénients puisque nous ne savons pas montrer (en général) l'injectivité de l'opérateur gradient, ce qui rend l'analyse difficile puisque l'existence et l'unicité de la solution du problème ne sont pas claires. Pour cette même raison, mais elle n'est pas la seule, la décomposition de Hodge sur les cellules primales et duales est impossible. Par conséquent, nous n'avons pas retenu ce schéma pour traiter le problème de Stokes ainsi que ceux qui en découlent.

D'un point de vue général, il ressort de tous les travaux effectués sur la méthode DDFV, qu'il vaut mieux discrétiser une inconnue scalaire sur les cellules primales et duales à la fois, tandis que les champs de vecteurs sont discrétisés sur les cellules-diamants, ce qui permet, en particulier, d'utiliser la décomposition de Hodge discrète.

## Extension au problème de Navier–Stokes et préconditionnement (Chapitre 7)

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de Navier-Stokes stationnaire qui s'écrit

comme suit :

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} = 0 \text{ au bord}, \int_{\Omega} p = 0.$$

La difficulté du problème de Navier-Stokes par rapport au problème de Stokes étant l'ajout d'un terme non linéaire qu'il faut discrétiser. Dans le cadre de notre méthode de volumes finis, nous avons été confrontés à un problème de définition lié à la dualité discrète de la méthode. En effet, si l'on reprend la discrétisation utilisée pour le problème de Stokes comme dans le chapitre 5, alors la vitesse  $\mathbf{u}$  est discrétisée sur les cellules-diamants, tout comme l'équation  $-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$ . Ainsi, le terme non-linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  doit être discrétisé sur les cellules-diamants. Or, d'après le principe de dualité discrète, si  $\mathbf{u}$  est défini sur les cellules-diamants, alors  $\nabla \mathbf{u}$  doit être discrétisé sur les cellules primales et duales. Il est clair qu'il faudra nécessairement utiliser une interpolation. Ainsi, plutôt que de résoudre le problème de Navier-Stokes écrit ci-dessus, nous allons résoudre un problème équivalent en utilisant la formulation rotationnelle de  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right),$$

où  $\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z = (-\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_x)^T$  en prenant  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  les deux composantes du vecteur  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ , pour lequel nous associons la pression de Bernoulli

$$\pi = p + \frac{\mathbf{u}^2}{2}.$$

Enfin, pour assurer l'unicité de  $\pi$ , on impose  $\int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . Ainsi, nous allons chercher  $\mathbf{u}$  et  $\pi$  solution de ce problème :

$$\begin{aligned} -\nu [\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] + (\nabla \times \mathbf{u}) \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z + \nabla \pi &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Notons qu'il y a quand même un problème de définition de  $\nabla \times \mathbf{u}$  sur les cellules-diamants. Le principal avantage de cette formulation rotationnelle tient à ce que  $(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{u} = 0$ .

On utilise ensuite un algorithme pour lequel nous allons résoudre un problème linéaire à chaque itération, qui prend la forme d'un point-selle :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour faciliter la résolution de ce problème et gagner en temps de calculs, nous allons préconditionner le système linéaire. A notre connaissance, aucune étude n'a été faite pour des préconditionneurs basés sur le complément de Schur  $S = -BA^{-1}B^T$  en volumes finis, c'est pourquoi nous nous sommes inspirés de travaux réalisés en éléments finis. Leur adaptation à la méthode DDFV n'est pas toujours triviale, comme nous le verrons dans le chapitre 7. Nous avons testé et effectué un benchmark pour plusieurs préconditionneurs connus en éléments finis :

- Le préconditionneur SIMPLE :  $\tilde{S}^{-1} = -(B\hat{A}^{-1}B^T)^{-1}$  où  $\hat{A}$  est une approximation de  $A$  (en pratique, nous prendrons la matrice diagonale de  $A$ .)
- Les commutateurs approchés (appelés méthode BFBt, qui est la notation introduite par Elman [44]) :

$$\tilde{S}^{-1} = -(BM_2^{-1}B^T)^{-1}(BM_2^{-1}AM_2^{-1}B^T)(BM_2^{-1}B^T)^{-1},$$

où les principaux candidats pour  $M_2$  sont la matrice identité  $I$ , la matrice de masse sur la vitesse  $X$  ou la matrice diagonale de  $A$ .

- Le préconditionneur d'Olshanskii [89] :

$$\tilde{S}^{-1} = -Q^{-1}BL^{-1}AL^{-1}B^TQ^{-1},$$

où  $L$  est l'opérateur Laplacien avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière et  $Q$  la matrice de masse sur la pression.

Les résultats montrent que le préconditionneur d'Elman est le plus performant. Ensuite, nous donnons des résultats numériques sur des maillages non-structurés et non-conformes. Les ordres de convergence de la vitesse  $\mathbf{u}$ , de la pression  $p$  et de la vorticité sont semblables à ceux obtenus pour le problème de Stokes.

## Apport de la thèse

L'apport principal de la thèse est bien sûr le développement d'une méthode de volumes finis qui s'applique à une classe de maillages beaucoup plus grande que celle des méthodes de volumes finis classiques, limitée par des conditions d'orthogonalité très restrictives. On construit des opérateurs différentiels discrets agissant sur les trois maillages décalés nécessaires à la construction de la méthode. Ces opérateurs vérifient des propriétés analogues à

---

celles des opérateurs continus. Dans le cadre de cette thèse, cette méthode a été appliquée à des problèmes très variés. Tout d'abord, le problème Div-Rot qui peut être considéré comme une brique du problème de Stokes (ou Maxwell), ensuite au problème de Stokes avec des conditions aux limites standard, non-standard et mixtes. Lorsque le domaine est polygonal et non-convexe, l'ordre de convergence se dégrade. Par conséquent, nous avons étudié la possibilité qu'un raffinement local approprié restaure l'ordre de convergence optimal. Ce résultat s'applique au problème de Laplace, au problème Div-Rot ainsi qu'au problème de Stokes avec des conditions aux limites non-standard. Enfin, nous avons étudié la discrétisation du problème de Stokes pour résoudre le problème non-linéaire de Navier-Stokes, à partir de la formulation rotationnelle du terme de convection, associé à ce qu'on appelle la pression de Bernoulli. Par un algorithme itératif, nous sommes amenés à résoudre un problème de point-selle appelé le problème d'Oseen. Nous accordons une attention particulière à ce problème linéaire en testant quelques préconditionneurs issus des éléments finis, que l'on adapte aux volumes finis. Dans tous les cas, nous fournissons des résultats numériques pour montrer les performances de la méthode sur des maillages arbitraires, tels que des maillages fortement non-conformes.





## Chapitre 2

# Définitions, notations et opérateurs différentiels

On note  $L^p(\Omega)$ , avec  $p > 1$ , les espaces de Lebesgue usuels de norme  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ . Par ailleurs, le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$  est noté  $(\cdot, \cdot)_\Omega$ . Ensuite, on note  $H^m(\Omega)$  l'espace des fonctions  $v$  de  $L^2(\Omega)$  dont les dérivées partielles (au sens des distributions)  $\partial^\alpha v$ , avec  $|\alpha| \leq m$ , appartiennent toutes à  $L^2(\Omega)$ , et dont la norme associée est  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ .

Les notations que nous allons définir ci-dessous sont répertoriées dans la Table 2.1 de la page 51 et nous pourrions nous y référer, si nécessaire, dans les prochains chapitres.

### 2.1 Construction des maillages primal, dual et diamant.

Soit  $\Omega$  un polygone borné de  $\mathbb{R}^2$ , qui n'est pas nécessairement simplement connexe. Nous supposons que le domaine a exactement  $Q$  trou(s), avec  $Q \geq 0$ .

Notons  $\Gamma$  la frontière du domaine  $\Omega$ . Alors  $\Gamma$  est la réunion de la frontière extérieure du domaine  $\Omega$ , notée  $\Gamma_0$ , et des frontières intérieures polygonales du domaine correspondant à chaque trou de  $\Omega$ , notées  $\Gamma_q$ ,  $\forall q \in [1, Q]$ ; ainsi  $\Gamma = \cup_{q \in [0, Q]} \Gamma_q$ .

#### 2.1.1 Construction du maillage primal

On considère une première partition de  $\Omega$ , nommée maillage primal, et composée d'éléments  $T_i$ , pour  $i \in [1, I]$ , supposés être des polygones convexes. A chaque élément  $T_i$  du

maillage, on associe  $G_i$  son centre de gravité. L'aire de  $T_i$  est notée  $|T_i|$ . On note  $J$  le nombre total d'arêtes de ce maillage parmi lesquelles  $J^\Gamma$  arêtes situées sur la frontière  $\Gamma$ . Par ailleurs, on associe à chacune des arêtes frontières son milieu que nous allons également noter  $G_i$  avec cette fois  $i \in [I + 1, I + J^\Gamma]$ . Pour simplifier les notations, nous écrirons  $i \in \Gamma_q$  plutôt que  $G_i \in \Gamma_q$ .

### 2.1.2 Construction du maillage dual

Notons  $S_k$ , avec  $k \in [1, K]$ , les noeuds des polygones du maillage primal. A chacun de ces points, on associe un polygone  $P_k$ , obtenu en joignant les points  $G_i$  associés aux éléments du maillage primal (et parfois les points  $G_i$  situés sur la frontière lorsque  $S_k$  est un point frontière) aux milieux des arêtes ayant  $S_k$  comme extrémité. Les cellules  $P_k$  constituent une deuxième partition de  $\Omega$ , que l'on nomme maillage dual. L'aire de  $P_k$  est notée  $|P_k|$ . La figure 2.1 présente un exemple de maillage primal non-conforme (en traits pleins) avec son maillage dual associé (en pointillés).

De plus, on suppose que l'ensemble des entiers  $[1, K]$  est ordonné de telle sorte que lorsque  $S_k$  est un sommet intérieur, alors  $k \in [1, K - J^\Gamma]$ , et lorsque  $S_k$  est un sommet appartenant à la frontière  $\Gamma$ , alors  $k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$ . Comme précédemment, nous ferons l'abus de notation suivant :  $k \in \Gamma_q$  si et seulement si  $S_k \in \Gamma_q$ .

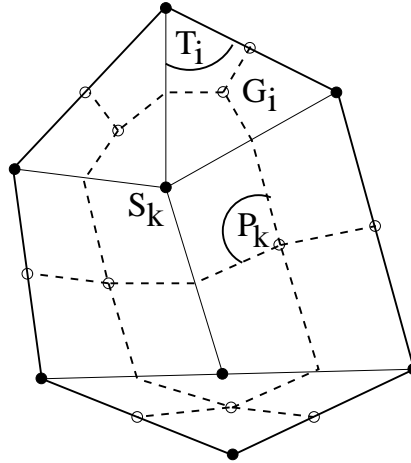


FIG. 2.1 – Un exemple de maillage primal et de son maillage dual associé.

### 2.1.3 Construction du maillage diamant

A chaque arête du maillage primal, notée  $A_j$  (et dont la longueur est  $|A_j|$ ), pour  $j \in [1, J]$ , on associe un quadrilatère  $D_j$  nommé “cellule-diamant”. Lorsque  $A_j$  est une arête intérieure, cette cellule est obtenue en joignant les points  $S_{k_1(j)}$  et  $S_{k_2(j)}$ , qui sont les extrémités de  $A_j$ , aux points  $G_{i_1(j)}$  et  $G_{i_2(j)}$  associés aux éléments du maillage primal qui ont cette arête en commun. Lorsque  $A_j$  est une arête sur la frontière  $\Gamma$ , la cellule  $D_j$  est obtenue en joignant les 2 extrémités de  $A_j$  au point  $G_{i_1(j)}$  associé au seul élément du maillage primal pour lequel  $A_j$  est une arête et au point  $G_{i_2(j)}$  milieu de  $A_j$  (rappelons que, par convention,  $i_2(j)$  est un élément de  $[I+1, I+J^\Gamma]$  lorsque  $A_j$  est située sur  $\Gamma$ ). Les cellules  $D_j$  constituent une troisième partition de  $\Omega$ , que l’on nomme maillage diamant. L’aire de la cellule  $D_j$  est notée  $|D_j|$ . La figure 2.2 présente deux exemples de cellules-diamants : à gauche, une cellule-diamant intérieure et à droite, une cellule-diamant frontière.

Enfin, on suppose que l’ensemble  $[1, J]$  est ordonné de telle sorte que lorsque  $A_j$  n’est pas sur  $\Gamma$ , alors  $j \in [1, J - J^\Gamma]$ , et lorsque  $A_j$  est sur  $\Gamma$ , alors  $j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$ . Nous ferons aussi l’abus de notation suivant :  $j \in \Gamma_q$  si et seulement si  $A_j \subset \Gamma_q$ .

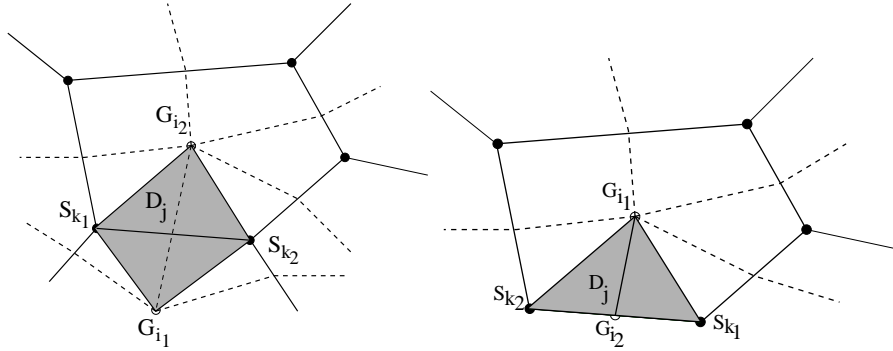


FIG. 2.2 – Exemples de cellules-diamants.

### 2.1.4 Définitions des éléments géométriques

Les éléments géométriques que nous allons définir ci-dessous sont représentés sur la Fig. 2.3. Le vecteur normal unitaire à  $A_j$  est noté  $\mathbf{n}_j$  et est orienté de telle sorte que son produit scalaire avec  $\mathbf{G}_{i_1(j)} \mathbf{G}_{i_2(j)}$  est positif. De la même manière, on note  $A'_j$  le segment  $[G_{i_1(j)} G_{i_2(j)}]$  (de longueur  $|A'_j|$ ) et  $\mathbf{n}'_j$  le vecteur normal unitaire à  $A'_j$  orienté de telle sorte que son produit

scalaire avec  $\mathbf{S}_{\mathbf{k}_1(j)}\mathbf{S}_{\mathbf{k}_2(j)}$  est positif.

Nous notons  $M_j$  le milieu de  $A_j$ ,  $A'_{j1}$  (respectivement  $A'_{j2}$ ) le segment  $[G_{i_1(j)}M_j]$  (resp.  $[M_jG_{i_2(j)}]$ ) et  $\mathbf{n}'_{j1}$  (resp.  $\mathbf{n}'_{j2}$ ) le vecteur unitaire normal à  $A'_{j1}$  (resp.  $A'_{j2}$ ) orienté de telle sorte que :

$$|A'_j|\mathbf{n}'_j = |A'_{j1}|\mathbf{n}'_{j1} + |A'_{j2}|\mathbf{n}'_{j2}. \quad (2.1)$$

On note  $M_{i_\alpha(j)k_\beta(j)}$  le milieu du segment  $[G_{i_\alpha(j)}S_{k_\beta(j)}]$ , pour chaque couple d'entiers  $(\alpha, \beta)$  dans  $\{1; 2\}^2$ . Ensuite, pour  $S_k \in \Gamma$  ( $k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$ ), on définit  $\tilde{A}_k$  comme l'union des

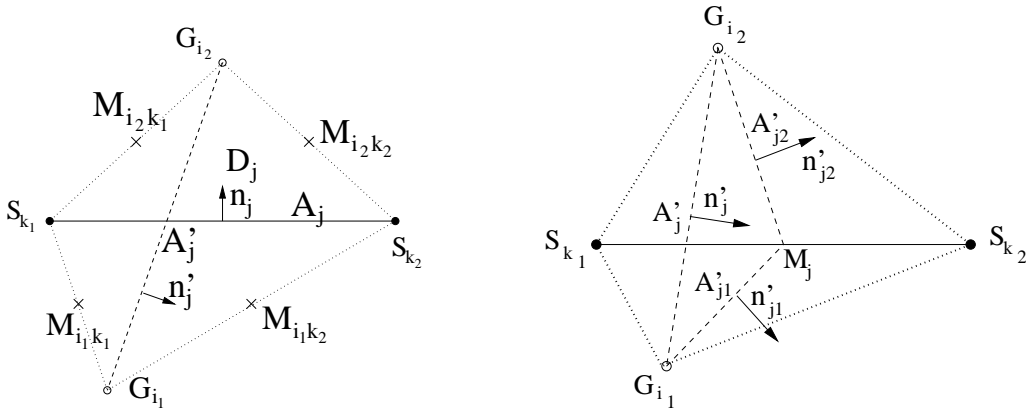


FIG. 2.3 – Notations pour la cellule-diamant.

deux demi-segments  $A_j$  situés sur  $\Gamma$  pour lesquels  $S_k$  est un sommet commun, et on note  $\tilde{\mathbf{n}}_k$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\tilde{A}_k$  (voir figure 2.4). Pour  $i \in [1, I]$ , on définit l'ensemble

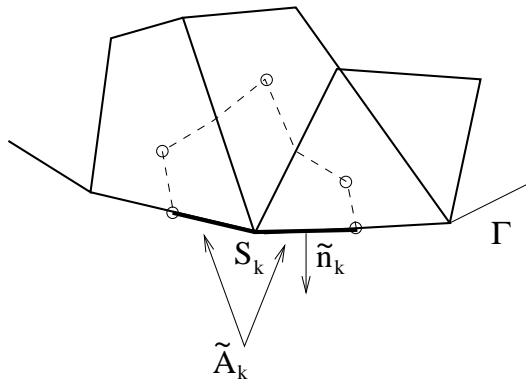


FIG. 2.4 – Définitions de  $\tilde{A}_k$  et  $\tilde{\mathbf{n}}_k$  pour les noeuds frontières.

$\mathcal{V}(i)$  des entiers  $j \in [1, J]$  tels que  $A_j$  est une arête de  $T_i$  et pour  $k \in [1, K]$ , l'ensemble  $\mathcal{E}(k)$

des entiers  $j \in [1, J]$  tels que  $S_k$  est un sommet de  $A_j$ .

Ensuite, on définit pour chaque  $j \in [1, J]$  et pour chaque  $k$  tels que  $j \in \mathcal{E}(k)$  (resp. chaque  $i$  tels que  $j \in \mathcal{V}(i)$ ) le réel  $s'_{jk}$  (resp.  $s_{ji}$ ) dont la valeur est  $+1$  ou  $-1$  selon que  $\mathbf{n}'_j$  (resp.  $\mathbf{n}_j$ ) pointe à l'extérieur ou à l'intérieur de  $P_k$  (resp.  $T_i$ ). On définit alors  $\mathbf{n}'_{jk} := s'_{jk}\mathbf{n}'_j$  (resp.  $\mathbf{n}_{ji} := s_{ji}\mathbf{n}_j$ ) et on remarque qu'il pointe toujours à l'extérieur de  $P_k$  (resp.  $T_i$ ).

Pour  $j \in [1, J - J^\Gamma]$ , comme indiqué sur la figure 2.5, on note  $D_{j,1}$  et  $D_{j,2}$ , les triangles  $S_{k_1(j)}G_{i_1(j)}S_{k_2(j)}$  et  $S_{k_2(j)}G_{i_2(j)}S_{k_1(j)}$ . De la même manière, on appelle  $D'_{j,1}$  et  $D'_{j,2}$ , les triangles  $G_{i_2(j)}S_{k_1(j)}G_{i_1(j)}$  et  $G_{i_1(j)}S_{k_2(j)}G_{i_2(j)}$ . Dans ce qui suit, nous allons supposer que toutes les cellules-diamants sont convexes si bien qu'on peut diviser chaque cellule-diamant intérieure  $D_j$  en deux triangles de deux manières : soit  $D_j = D_{j,1} \cup D_{j,2}$ , ou alors  $D_j = D'_{j,1} \cup D'_{j,2}$ . Pour les cellules-diamants situées au bord, on a  $D_{j,1} = D_j$  et  $D_{j,2} = \emptyset$ . Pour simplifier les notations, nous écrirons  $\mathcal{T}_{j,\gamma}$  pour représenter  $D_{j,\gamma}$  ou  $D'_{j,\gamma}$ , selon le choix. Ainsi, nous avons  $D_j = \mathcal{T}_{j,1} \cup \mathcal{T}_{j,2}$ .

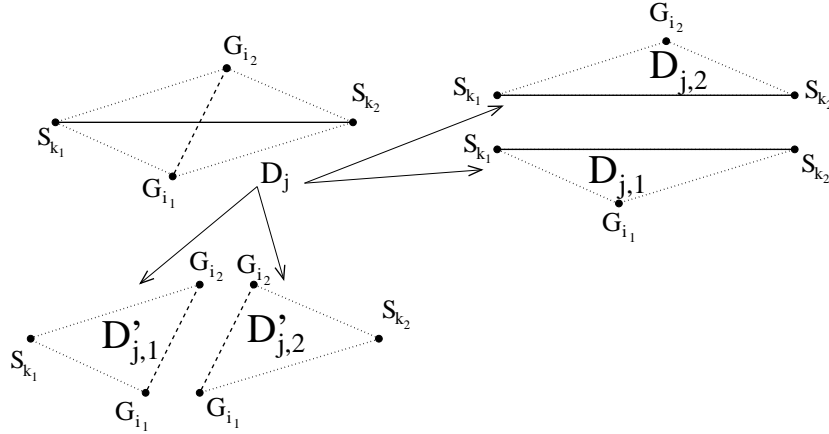


FIG. 2.5 – Une cellule-diamant peut se diviser en deux triangles de deux manières distinctes.

Enfin, la fonction caractéristique associée à la cellule  $T_i$  (resp.  $P_k$ ) sera notée  $\theta_i^T$  (resp.  $\theta_k^P$ ). De même, la fonction caractéristique associée à l'arête intérieure (resp. frontière)  $A_j$  sera notée  $\theta_j^D$  (resp.  $\theta_j^\Gamma$ ).

### 2.1.5 Définitions des produits scalaires et des normes discrètes et continues

Comme nous le verrons dans la suite, nous allons associer à chaque point  $G_i$  ( $i \in [1, I + J^\Gamma]$ ) et à chaque sommet  $S_k$  ( $k \in [1, K]$ ) des valeurs discrètes. Ceci nous conduit à la définition du

produit scalaire suivant pour tout  $(\phi, \psi) = ((\phi_i^T, \phi_k^P), (\psi_i^T, \psi_k^P)) \in (\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^K)^2$

$$(\phi, \psi)_{T,P} := \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in [1,I]} |T_i| \phi_i^T \psi_i^T + \sum_{k \in [1,K]} |P_k| \phi_k^P \psi_k^P \right). \quad (2.2)$$

De la même manière, nous définissons un produit scalaire discret sur les cellules-diamants pour tout  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{u}_j), (\mathbf{v}_j)) \in (\mathbb{R}^J)^2 \times (\mathbb{R}^J)^2$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_D := \sum_{j \in [1,J]} |D_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_j, \quad (2.3)$$

et un produit scalaire discret pour les traces de  $\sigma \in \mathbb{R}^J$  et  $\phi \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  sur les frontières  $\Gamma_q$  (avec  $q \in [0, Q]$ )

$$(\sigma, \phi)_{\Gamma_q, h} := \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| \sigma_j \times \frac{1}{4} \left( \phi_{k_1(j)}^P + 2\phi_{i_2(j)}^T + \phi_{k_2(j)}^P \right),$$

et sur  $\Gamma$  tout entier

$$(\sigma, \phi)_{\Gamma, h} := \sum_{q \in [0, Q]} (\sigma, \phi)_{\Gamma_q, h}. \quad (2.4)$$

Remarquons que  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma, h}$  n'est pas un produit scalaire puisque  $\sigma$  et  $\phi$  ne vivent pas dans le même espace. Cependant, dans la suite, nous ferons cet abus de langage.

Pour tout  $\phi \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$ , nous allons définir une semi-norme discrète  $H^1$  sur le maillage diamant à l'aide de l'opérateur gradient discret que nous allons définir juste après (voir (2.7)) :

$$|\phi|_{1,D} := (\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \phi)^{1/2}.$$

## 2.2 Construction des opérateurs discrets

Dans cette section, nous approchons les opérateurs gradient, divergence et rotationnel par leurs homologues discrets. Rappelons qu'en deux dimensions, une distinction est faite habituellement entre l'opérateur rotationnel qui agit sur des champs scalaires à valeurs dans les champs de vecteurs (que nous appellerons opérateur rotationnel vecteur) défini par  $\nabla \times \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^T$ , et l'opérateur rotationnel qui agit sur des champs de vecteurs à valeurs dans les champs scalaires (que nous appellerons opérateur rotationnel scalaire) défini par  $\nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial y}$ .

La figure 2.6 montre les supports des différents opérateurs et de leurs combinaisons. Le support pour les opérateurs gradient et rotationnel vecteur discrets correspond simplement aux

quatre coins de la cellule-diamant  $D_j$ . Le support pour les opérateurs divergence et rotationnel scalaire discrets correspond aux cellules-diamants associées aux arêtes des cellules primales et aux cellules duales, en utilisant la formule (2.1) pour la divergence et en remplaçant  $\mathbf{n}$  par  $\boldsymbol{\tau}$  dans cette formule pour le rotationnel. Des flèches illustrent sur la Fig. 2.6 les composantes normales et tangentielles des champs de vecteurs associés aux cellules-diamants. Les supports pour le laplacien discret sur, respectivement, les cellules primales et duales sont représentés par des cercles noirs et blancs sur les parties gauche et droite de la figure.

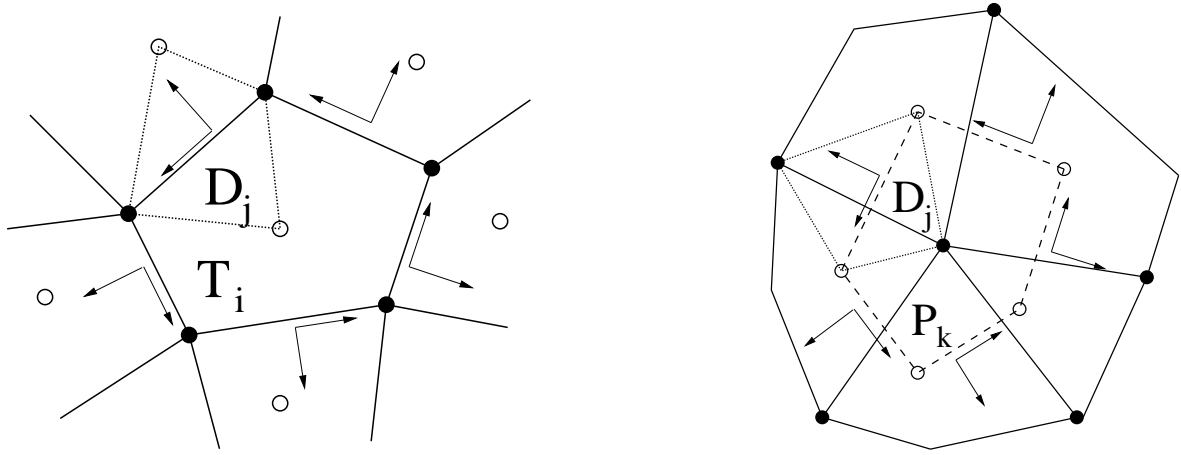


FIG. 2.6 – Supports pour les opérateurs discrets.

### 2.2.1 Construction des opérateurs gradient et rotationnel vecteur discrets sur les cellules-diamants

Nous définissons le gradient discret d'une fonction  $\phi$  par ses valeurs sur les cellules-diamants du maillage. Nous suivons [31] et calculons la valeur moyenne du gradient d'une fonction  $\phi$  sur la cellule  $D_j$  par la formule de quadrature suivante :

$$\begin{aligned}
 |D_j| \langle \nabla \phi|_{D_j} \rangle &= \int_{D_j} \nabla \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\partial D_j} \phi(\xi) \mathbf{n}(\xi) d\xi \\
 &= \int_{[S_{k_1} G_{i_1}]} \phi(\xi) \mathbf{n}_{S_{k_1} G_{i_1}} d\xi + \int_{[G_{i_1} S_{k_2}]} \phi(\xi) \mathbf{n}_{G_{i_1} S_{k_2}} d\xi \\
 &+ \int_{[S_{k_2} G_{i_2}]} \phi(\xi) \mathbf{n}_{S_{k_2} G_{i_2}} d\xi + \int_{[G_{i_2} S_{k_1}]} \phi(\xi) \mathbf{n}_{G_{i_2} S_{k_1}} d\xi, \quad (2.5)
 \end{aligned}$$



où  $\mathbf{n}_{S_{k_\beta} G_{i_\alpha}}$ ,  $\forall \alpha \in \{1, 2\}$ ,  $\forall \beta \in \{1, 2\}$  désigne le vecteur normal unitaire sortant de  $S_{k_\beta} G_{i_\alpha}$  et  $\mathbf{n}(\xi)$  le vecteur normal unitaire sortant de  $D_j$  au point  $\xi$ . Les intégrales dans (2.5) peuvent être approchées par la formule suivante :

$$\int_{[GS]} \phi(\xi) d\xi \approx l_{GS} \frac{[\phi(G) + \phi(S)]}{2}, \quad (2.6)$$

où  $l_{GS}$  désigne la longueur du segment  $[GS]$ . Cela nous permet d'écrire, en regroupant les contributions de chacun des sommets de  $D_j$ ,

$$\begin{aligned} |D_j| \left\langle \nabla \phi|_{D_j} \right\rangle &\approx \phi(S_{k_1}) \frac{l_{S_{k_1} G_{i_1}} \mathbf{n}_{S_{k_1} G_{i_1}} + l_{G_{i_2} S_{k_1}} \mathbf{n}_{G_{i_2} S_{k_1}}}{2} \\ &+ \phi(G_{i_1}) \frac{l_{S_{k_1} G_{i_1}} \mathbf{n}_{S_{k_1} G_{i_1}} + l_{G_{i_1} S_{k_2}} \mathbf{n}_{G_{i_1} S_{k_2}}}{2} \\ &+ \phi(S_{k_2}) \frac{l_{S_{k_2} G_{i_2}} \mathbf{n}_{S_{k_2} G_{i_2}} + l_{G_{i_1} S_{k_2}} \mathbf{n}_{G_{i_1} S_{k_2}}}{2} \\ &+ \phi(G_{i_2}) \frac{l_{S_{k_2} G_{i_2}} \mathbf{n}_{S_{k_2} G_{i_2}} + l_{G_{i_2} S_{k_1}} \mathbf{n}_{G_{i_2} S_{k_1}}}{2}. \end{aligned}$$

De surcroît, dans le triangle  $S_{k_1} G_{i_1} G_{i_2}$ , nous avons la relation :

$$l_{S_{k_1} G_{i_1}} \mathbf{n}_{S_{k_1} G_{i_1}} + l_{G_{i_2} S_{k_1}} \mathbf{n}_{G_{i_2} S_{k_1}} = -l_{G_{i_1} G_{i_2}} \mathbf{n}_{G_{i_1} G_{i_2}} = -|A'_j| \mathbf{n}'_j.$$

En procédant de manière similaire pour les trois autres triangles, et en tenant compte des orientations de leurs vecteurs normaux unitaires sortants respectifs, nous obtenons la *définition* du gradient discret  $\nabla_h^D$  sur la cellule  $D_j$  :

**Définition 2.1** L'opérateur gradient discret  $\nabla_h^D$  est défini par ses valeurs sur les cellules-diamants  $D_j$  :

$$(\nabla_h^D \phi)_j := \frac{1}{2|D_j|} \left\{ [\phi_{k_2}^P - \phi_{k_1}^P] |A'_j| \mathbf{n}'_j + [\phi_{i_2}^T - \phi_{i_1}^T] |A_j| \mathbf{n}_j \right\}. \quad (2.7)$$

Notons que la formule (2.7) est exacte pour une fonction affine  $\phi$  si nous posons  $\phi_{k_\alpha}^P := \phi(S_{k_\alpha})$  et  $\phi_{i_\alpha}^T := \phi(G_{i_\alpha})$ , pour  $\alpha \in \{1, 2\}$ . Le calcul du gradient discret nécessite seulement la connaissance des valeurs de  $\phi$  aux noeuds des maillages primal et dual. L'opérateur  $\nabla_h^D$  agit donc de  $\mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  dans  $(\mathbb{R}^J)^2$ .

De la même manière, on peut approcher l'opérateur rotationnel vecteur  $\nabla \times \bullet = \left( \frac{\partial \bullet}{\partial y}, -\frac{\partial \bullet}{\partial x} \right)^T$  par un opérateur rotationnel vecteur discret :

$$\begin{aligned}
 |D_j| \langle \nabla^D \times \phi \rangle &= \int_{D_j} \nabla \times \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{D_j} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^T (\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= - \int_{\partial D_j} \phi(-n_y, n_x)^T(\xi) d\xi \\
 &= - \int_{\partial D_j} \phi(\xi) \boldsymbol{\tau}(\xi) d\xi \\
 &= - \int_{[S_{k_1} G_{i_1}]} \phi(\xi) \boldsymbol{\tau}_{S_{k_1} G_{i_1}} d\xi - \int_{[G_{i_1} S_{k_2}]} \phi(\xi) \boldsymbol{\tau}_{G_{i_1} S_{k_2}} d\xi \\
 &\quad - \int_{[S_{k_2} G_{i_2}]} \phi(\xi) \boldsymbol{\tau}_{S_{k_2} G_{i_2}} d\xi - \int_{[G_{i_2} S_{k_1}]} \phi(\xi) \boldsymbol{\tau}_{G_{i_2} S_{k_1}} d\xi,
 \end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{\tau}_{S_{k_\beta} G_{i_\alpha}}, \forall \alpha \in \{1, 2\}, \forall \beta \in \{1, 2\}$ , désigne le vecteur tangentiel unitaire à  $S_{k_\beta} G_{i_\alpha}$  et  $\boldsymbol{\tau}(\xi)$  le vecteur tangentiel unitaire de  $D_j$  au point  $\xi$  de telle sorte que :

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y) = (-n_y, n_x).$$

En utilisant l'approximation de l'intégrale décrite par la formule (2.6), nous obtenons la *définition* du rotationnel vecteur discret  $\nabla_h^D \times$  sur la cellule  $D_j$  :

**Définition 2.2** L'opérateur rotationnel vecteur discret  $\nabla_h^D \times$  est défini par ses valeurs sur les cellules-diamants  $D_j$  :

$$(\nabla_h^D \times \phi)_j := -\frac{1}{2|D_j|} \left\{ [\phi_{k_2}^P - \phi_{k_1}^P] |A'_j| \boldsymbol{\tau}'_j + [\phi_{i_2}^T - \phi_{i_1}^T] |A_j| \boldsymbol{\tau}_j \right\}, \quad (2.8)$$

où les vecteurs unitaires tangentiels  $\boldsymbol{\tau}_j$  et  $\boldsymbol{\tau}'_j$  sont tels que  $(\mathbf{n}_j, \boldsymbol{\tau}_j)$  et  $(\mathbf{n}'_j, \boldsymbol{\tau}'_j)$  sont orthonormaux et orientés positivement dans  $\mathbb{R}^2$ .

Comme précédemment, le calcul du rotationnel vecteur discret nécessite seulement la connaissance des valeurs de  $\phi$  aux noeuds des maillages primal et dual. L'opérateur  $\nabla_h^D \times$  agit donc de  $\mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  dans  $(\mathbb{R}^J)^2$ .

### 2.2.2 Construction des opérateurs divergence, rotationnel scalaire discrets sur les maillages primal et dual.

Nous choisissons de définir la divergence discrète d'un champ de vecteur  $\mathbf{u}$  par ses valeurs sur les cellules primales et duales du maillage. Une manière très naturelle de la définir sur les

cellules primales  $T_i$  consiste à écrire

$$|T_i| \langle \nabla \cdot \mathbf{u}|_{T_i} \rangle = \int_{T_i} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial T_i} \mathbf{u}(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi) = \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \int_{A_j} \mathbf{u}(\xi) \cdot \mathbf{n}_{ji} ,$$

où nous rappelons que  $\mathcal{V}(i)$  est l'ensemble des entiers  $j \in [1, J]$  tels que  $A_j$  est une arête de  $T_i$  et que  $\mathbf{n}_{ji}$  est le vecteur normal unitaire de  $A_j$  sortant de  $T_i$ . En supposant que le champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  est donné par ses valeurs discrètes  $\mathbf{u}_j$  sur les cellules-diamants  $D_j$ , et en procédant de la même manière sur les cellules  $P_k$ , nous donnons la *définition* de la divergence discrète  $\nabla_h^T \cdot$  sur chaque  $T_i$  et la divergence discrète  $\nabla_h^P \cdot$  sur chaque  $P_k$  :

**Définition 2.3** La divergence discrète  $\nabla_h^{T,P} \cdot := (\nabla_h^T \cdot, \nabla_h^P \cdot)$  est définie par ses valeurs sur les cellules primales  $T_i$  et les cellules duales  $P_k$  :

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i &:= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} , \\ (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k &:= \frac{1}{|P_k|} \left( \sum_{j \in \mathcal{E}(k)} (|A'_{j1}| \mathbf{n}'_{jk1} + |A'_{j2}| \mathbf{n}'_{jk2}) \cdot \mathbf{u}_j + \sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J-J^\Gamma+1, J]} \frac{1}{2} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j \right) . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Remarquons que si le noeud  $S_k$  n'est pas sur la frontière  $\Gamma$  (*i.e.* si  $k \in [1, K - J^\Gamma]$ ), alors l'ensemble  $\mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]$  est vide. Si, au contraire,  $P_k$  est une cellule frontière, alors l'ensemble  $\mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]$  est composé de deux arêtes frontières ayant  $S_k$  comme sommet. Dans ce cas, la quantité  $\sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]} \frac{1}{2} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j$  est une approximation de  $\int_{\tilde{A}_k} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_k(\xi) \, d\xi$  (voir la figure 2.4). Notons aussi qu'on pourrait remplacer  $(|A'_{j1}| \mathbf{n}'_{jk1} + |A'_{j2}| \mathbf{n}'_{jk2})$  par  $|A'_j| \mathbf{n}'_{jk}$  puisque ces quantités sont égales.

De plus, pour un champ de vecteurs donné  $\mathbf{u}$ , on vérifie directement que les formules (2.9) sont les valeurs moyennes exactes de  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  sur les  $T_i$ , respectivement sur les  $P_k$  intérieurs, si

$$|A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} = \int_{A_j} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ji} \, ds , \quad (2.10)$$

respectivement si

$$(|A'_{j1}| \mathbf{n}'_{jk1} + |A'_{j2}| \mathbf{n}'_{jk2}) \cdot \mathbf{u}_j = \int_{A'_{j1}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_{jk1} \, ds + \int_{A'_{j2}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}'_{jk2} \, ds . \quad (2.11)$$

Cette définition de la divergence discrète sur les cellules primales et duales ne nécessite que la connaissance des valeurs de  $\mathbf{u}$  sur les cellules-diamants. L'opérateur  $\nabla_h^{T,P} \cdot$  agit donc de  $(\mathbb{R}^J)^2$  dans  $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^K$ .

De la même manière, on approche l'opérateur rotationnel scalaire  $\nabla \times \bullet = \left( \frac{\partial \bullet_y}{\partial x} - \frac{\partial \bullet_x}{\partial y} \right)$  par l'opérateur rotationnel scalaire discret :

**Définition 2.4** *L'opérateur rotationnel scalaire discret  $\nabla_h^{T,P} \times := (\nabla_h^T \times, \nabla_h^P \times)$  est défini par ses valeurs sur les cellules primales  $T_i$  et sur les cellules duales  $P_k$  :*

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_{ji}, \\ (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k &= \frac{1}{|P_k|} \left( \sum_{j \in \mathcal{E}(k)} (|A'_{j1}| \boldsymbol{\tau}'_{jk1} + |A'_{j2}| \boldsymbol{\tau}'_{jk2}) \cdot \mathbf{u}_j + \sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J-J^\Gamma+1, J]} \frac{1}{2} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Notons aussi qu'on pourrait remplacer  $(|A'_{j1}| \boldsymbol{\tau}'_{jk1} + |A'_{j2}| \boldsymbol{\tau}'_{jk2})$  par  $|A'_j| \boldsymbol{\tau}'_{jk}$  puisque ces quantités sont égales. De plus, pour un champ de vecteurs donné  $\mathbf{u}$ , on vérifie que les formules (2.12) sont les valeurs moyennes exactes de  $\nabla \times \mathbf{u}$  sur les  $T_i$ , respectivement sur les  $P_k$  intérieurs, si l'équation (2.10), respectivement si (2.11), est vérifiée en remplaçant  $\mathbf{n}$  par  $\boldsymbol{\tau}$ . Comme précédemment, la définition du rotationnel scalaire discret ne nécessite que la connaissance des valeurs de  $\mathbf{u}$  sur les cellules-diamants. Ainsi, l'opérateur  $\nabla_h^{T,P} \times$  agit de  $(\mathbb{R}^J)^2$  dans  $\mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^K$ .

## 2.3 Propriétés des opérateurs

### 2.3.1 Formules de Green discrètes

Les opérateurs discrets définis dans la section 2.2 vérifient des principes de dualité discrète, similaires aux formules de Green impliquant les opérateurs continus.

**Proposition 2.1** *Nous avons les analogues discrets des formules de Green :*

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u}, \phi)_{T,P} = -(\mathbf{u}, \nabla_h^D \phi)_D + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \phi)_{\Gamma,h}, \quad (2.13)$$

$$(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \phi)_{T,P} = (\mathbf{u}, \nabla_h^D \times \phi)_D + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, \phi)_{\Gamma,h}, \quad (2.14)$$

pour tout  $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^J)^2$  et tout  $\phi = (\phi^T, \phi^P) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$ , en utilisant les définitions (2.2), (2.3) et (2.4).

**Preuve** La preuve de (2.13) se trouve dans [40] et est basée sur une sommation discrète par parties. La preuve de (2.14) est similaire.  $\square$

### 2.3.2 Composition des opérateurs discrets

Le but de cette section est de vérifier l'analogie discret des égalités suivantes valables en 2D :  $\nabla \cdot (\nabla \times \bullet) = 0$ ,  $\nabla \times \nabla \bullet = 0$  et  $\nabla \times \nabla \times \bullet = -\nabla \cdot \nabla \bullet$ . Pour cela, nous partons du lemme suivant :

**Lemme 2.1** *Rappelons que  $s_{ji}$  et  $s'_{jk}$  sont définis dans la section 2.1.4. Alors,*

$$\sum_{j \in \mathcal{V}(i)} s_{ji} \left( \phi_{k_2(j)}^P - \phi_{k_1(j)}^P \right) = 0, \quad \forall i \in [1, I], \quad (2.15)$$

$$\sum_{j \in \mathcal{E}(k)} s'_{jk} \left( \phi_{i_2(j)}^T - \phi_{i_1(j)}^T \right) = 0, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma]. \quad (2.16)$$

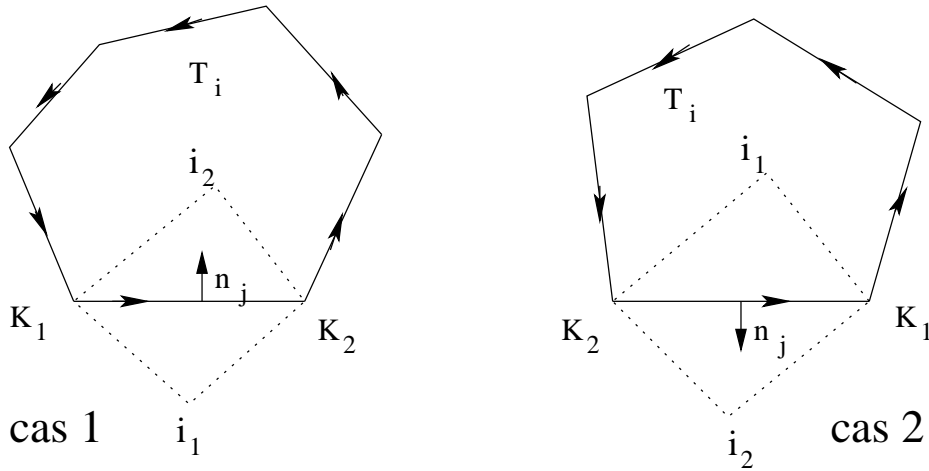


FIG. 2.7 – Deux possibilités d'orientation pour chaque arête.

**Preuve** Considérons une cellule primale  $T_i$  donnée. Pour chaque arête  $A_j$  de  $T_i$ , avec  $j \in \mathcal{V}(i)$ , nous avons deux possibilités d'orientation de  $\mathbf{n}_j$  (voir la figure 2.7) : si  $\mathbf{n}_j$  est le vecteur normal unitaire rentrant de  $T_i$  (cas 1), alors  $s_{ji} = -1$  et  $s_{ji} (\phi_{k_2(j)}^P - \phi_{k_1(j)}^P) = \phi_{k_1(j)}^P - \phi_{k_2(j)}^P$ . Si  $\mathbf{n}_j$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $T_i$  (cas 2), nous avons alors  $s_{ji} = +1$  et  $s_{ji} (\phi_{k_2(j)}^P - \phi_{k_1(j)}^P) = \phi_{k_2(j)}^P - \phi_{k_1(j)}^P$ ; de plus, les sommets  $S_{k_1(j)}$  et  $S_{k_2(j)}$  sont échangés. Finalement, quel que soit le cas, la valeur  $\phi_k^P$  associée au sommet "gauche" de l'arête  $A_j$  considérée apparaît dans la somme (2.15) avec un signe positif et la valeur  $\phi_k^P$  associée au sommet droit de l'arête  $A_j$  considérée apparaît dans la somme (2.15) avec un signe négatif. Mais chaque  $\phi_k^P$  apparaît deux fois dans cette somme, une fois comme valeur associée au sommet "droit" de

l'arête donnée, et une fois comme valeur associée au sommet "gauche" de l'arête suivante, de telle sorte que les deux contributions s'annulent. Ainsi s'achève la preuve de (2.15). La preuve de (2.16) repose sur les mêmes arguments.  $\square$

Les propriétés suivantes sont les conséquences directes du calcul de l'aire  $|D_j|$  :

**Lemme 2.2**

$$\frac{|A_j| |A'_j|}{2 |D_j|} \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\tau}'_j = 1, \quad \forall j \in [1, J], \quad (2.17)$$

$$\frac{|A_j| |A'_j|}{2 |D_j|} \mathbf{n}'_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = -1, \quad \forall j \in [1, J]. \quad (2.18)$$

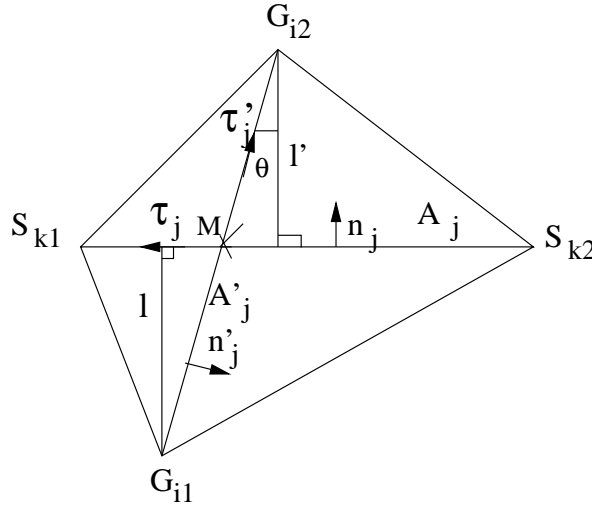


FIG. 2.8 – La surface de la cellule-diamant  $D_j$ .

**Preuve** D'après les notations de la figure 2.8, nous avons pour toute cellule-diamant intérieure :

$$\begin{aligned} |D_j| &= |S_{k1}G_{i1}S_{k2}| + |S_{k2}G_{i2}S_{k1}| \\ &= \frac{1}{2} |A_j| l + \frac{1}{2} |A_j| l' \\ &= \frac{1}{2} |A_j| |G_{i1}M| \cos(\theta) + \frac{1}{2} |A_j| |G_{i2}M| \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} |A_j| |A'_j| \cos(\theta). \end{aligned}$$

Si  $D_j$  est une cellule-diamant frontière, alors d'après la figure 2.2 :

$$|G_{i1}M| = 0 \text{ et } |G_{i2}M| = |A'_j|, \text{ donc on a encore : } |D_j| = \frac{1}{2} |A_j| |A'_j| \cos(\theta).$$

Enfin,  $\cos(\theta) = \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\tau}'_j = -\mathbf{n}'_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j$ , ce qui clôt la preuve.  $\square$

On peut maintenant énoncer les résultats suivants :

**Proposition 2.2**

$$(\nabla_h^T \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_i = 0, \quad \forall i \in [1, I], \quad (2.19a)$$

$$(\nabla_h^P \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_k = 0, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \quad (2.19b)$$

$$(\nabla_h^T \times (\nabla_h^D \phi))_i = 0, \quad \forall i \in [1, I], \quad (2.20a)$$

$$(\nabla_h^P \times (\nabla_h^D \phi))_k = 0, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma]. \quad (2.20b)$$

De plus, sur les cellules duales frontières  $P_k$  ( $k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$ ), ces formules sont encore valables si il existe  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [0, Q]}$  tel que  $\phi_i^T = c_q^T$  et  $\phi_k^P = c_q^P$  sur  $\Gamma_q$  pour tout  $q \in [0, Q]$ .

**Preuve** Prouvons tout d'abord (2.19a) ; en combinant (2.9), (2.8), et le fait que  $\mathbf{n}_{ji} \cdot \boldsymbol{\tau}_j = 0$ , cela donne :

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_i &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| (\nabla_h^D \times \phi)_j \cdot \mathbf{n}_{ji} \\ &= -\frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \frac{|A_j| |A'_j|}{2 |D_j|} \mathbf{n}_j \cdot \boldsymbol{\tau}'_j s_{ji} (\phi_{k_2(j)}^P - \phi_{k_1(j)}^P), \quad \forall i \in [1, I]. \end{aligned}$$

En appliquant (2.17) et (2.15) successivement, on obtient :

$$(\nabla_h^T \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_i = 0, \quad \forall i \in [1, I].$$

On prouve (2.20a) de manière analogue.

Ensuite, pour chaque cellule duale intérieure  $P_k$ , avec  $k \in [1, K - J^\Gamma]$ , il est clair que l'ensemble  $\mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]$  est vide, de sorte que (2.19b) et (2.20b) peuvent être montrées comme (2.19a) et (2.20a), en utilisant (2.18), (2.16) et le fait que  $\mathbf{n}'_{jk} \cdot \boldsymbol{\tau}'_j = 0$ .

En ce qui concerne les cellules duales frontières  $P_k$  ( $k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$ ), des calculs similaires montrent que (voir Fig. 2.9 pour les notations) :

$$(\nabla_h^P \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_k = \frac{1}{|P_k|} (\phi_{I_2}^T - \phi_{I_1}^T) + \frac{1}{2 |P_k|} (\phi_{K_1}^P - \phi_{K_2}^P). \quad (2.21)$$

Si tous les  $\phi_i^T$  sont égaux à la même constante  $c_q^T$  sur  $\Gamma_q$  et si tous les  $\phi_k^P$  sont égaux à la même constante  $c_q^P$  sur  $\Gamma_q$ , alors  $\phi_{I_2}^T = \phi_{I_1}^T$  et  $\phi_{K_1}^P = \phi_{K_2}^P$ . Autrement dit,

$$(\nabla_h^P \cdot (\nabla_h^D \times \phi))_k = 0,$$

pour toutes les cellules duales frontières. On prouve (2.20b) pour les cellules duales frontières de manière analogue.  $\square$

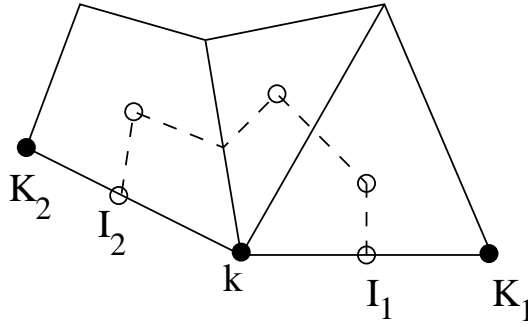


FIG. 2.9 – Notations pour les cellules duales frontières.

**Proposition 2.3** *Nous avons les égalités suivantes :*

$$(\nabla_h^T \times \nabla_h^D \times \phi)_i = -(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_i, \quad \forall i \in [1, I], \quad (2.22a)$$

$$(\nabla_h^P \times \nabla_h^D \times \phi)_k = -(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \phi)_k, \quad \forall k \in [1, K]. \quad (2.22b)$$

**Preuve** Ces formules proviennent directement des définitions (2.7), (2.8), (2.9) et (2.12), et de l'égalité  $\tau_j \cdot \tau'_j = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}'_j$ ,  $\forall j \in [1, J]$ .  $\square$

### 2.3.3 Décomposition de Hodge

Dans le cas continu, la décomposition de Hodge pour les domaines non-simplement connexes s'écrit :

$$(L^2)^2 = \nabla V \oplus \nabla \times W, \quad (2.23)$$

avec  $V = \{\phi \in H^1 : \int_{\Omega} \phi = 0\}$  et  $W = \{\psi \in H^1 : \psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_q} = c_q, \quad \forall q \in [1, Q]\}$ . Pour prouver une propriété analogue dans le cas discret, on aura besoin du lemme suivant qui nous donne une relation entre le nombre de cellules primales, duales et diamants d'un maillage.



**Lemme 2.3 (Formule d'Euler)** *Pour des domaines non-simplement connexes bidimensionnels couverts par un maillage avec  $I$  éléments,  $K$  sommets,  $J$  arêtes et  $Q$  trous, nous avons la relation :*

$$I + K = J + 1 - Q . \quad (2.24)$$

On peut maintenant établir une décomposition de Hodge discrète :

**Théorème 2.1** *Soit  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  un champ de vecteurs discret défini par ses valeurs sur les cellules-diamants  $D_j$ . Il existe trois couples uniques  $\phi = (\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ ,  $\psi = (\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que :*

$$\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \phi)_j + (\nabla_h^D \times \psi)_j, \quad \forall j \in [1, J] \quad (2.25)$$

avec

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0 , \quad (2.26)$$

$$\psi_i^T = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \quad \psi_k^P = 0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \quad (2.27)$$

et

$$\forall q \in [1, Q], \quad \psi_i^T = c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \psi_k^P = c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q. \quad (2.28)$$

De plus, la décomposition (2.25) est orthogonale au sens du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_D$ .

**Preuve** On dénombre  $2(I + K + J^\Gamma) + 2Q$  inconnues correspondant aux  $(\phi_i^T, \phi_k^P)$  et  $(\psi_i^T, \psi_k^P)$ , et aux constantes  $(c_q^T, c_q^P)$ . D'autre part, l'équation (2.25) fournit  $2J$  équations, tandis que (2.27) et (2.28) ajoutent  $2J^\Gamma$  contraintes. Enfin, (2.26) donne deux égalités supplémentaires, ce qui conduit à un nombre total d'équations de  $2J + 2J^\Gamma + 2$ . Par conséquent, en appliquant (2.24), on constate que le système présente autant d'équations que d'inconnues. Ainsi, l'existence et l'unicité de la décomposition sont équivalentes et nous allons prouver l'unicité grâce à l'injectivité.

Tout d'abord, prouver l'orthogonalité de  $(\nabla_h^D \phi)$  et  $(\nabla_h^D \times \psi)$  pour tout  $(\phi, \psi)$ , avec  $\psi$  vérifiant (2.27) et (2.28), est équivalent à montrer que  $(\nabla_h^D \times \psi, \nabla_h^D \phi)_D = 0$ . Grâce à (2.13), nous avons

$$(\nabla_h^D \times \psi, \nabla_h^D \phi)_D = -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \times \psi, \phi)_{T,P} + (\nabla_h^D \times \psi \cdot \mathbf{n}, \phi)_{\Gamma,h} .$$

Ensuite, grâce à la proposition 2.2, et parce que  $\psi$  vérifie (2.27) et (2.28), nous déduisons que  $\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \times \psi$  est nul. D'autre part, d'après (2.8), nous avons

$$(\nabla_h^D \times \psi)_j \cdot \mathbf{n}_j = -\frac{1}{2|D_j|} (\psi_{k_2}^P - \psi_{k_1}^P) |A'_j| \boldsymbol{\tau}'_j \cdot \mathbf{n}_j ,$$

qui s'annule aussi sur la frontière à cause de (2.27) et (2.28). Ainsi, l'orthogonalité est démontrée.

Maintenant, pour prouver l'injectivité, on suppose que  $\mathbf{u}_j = 0, \forall j \in [1, J]$ , autrement dit :

$$0 = (\nabla_h^D \phi)_j + (\nabla_h^D \times \psi)_j, \forall j \in [1, J] . \quad (2.29)$$

Nous effectuons le produit scalaire de cette expression avec  $|D_j| (\nabla_h^D \phi)_j$  et nous sommes sur les  $j \in [1, J]$ . On obtient alors :

$$0 = (\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \phi)_D + (\nabla_h^D \times \psi, \nabla_h^D \phi)_D. \quad (2.30)$$

Grâce à l'orthogonalité prouvée ci-dessus, l'équation (2.30) implique que  $(\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \phi)_D = \sum_{j \in [1, J]} |D_j| |(\nabla_h^D \phi)_j|^2 = 0$ , ce qui signifie que  $(\nabla_h^D \phi)_j$  s'annule pour tout  $j$ . Par conséquent, comme le domaine est connexe, il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\phi_k^P = \alpha, \forall k \in [1, K]$  et  $\phi_i^T = \beta, \forall i \in [1, I + J^\Gamma]$ . En appliquant (2.26), on en déduit que ces deux constantes sont nulles, d'où

$$\phi_i^T = 0, \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \text{ et } \phi_k^P = 0, \forall k \in [1, K] .$$

Par conséquent, l'équation (2.29) est équivalente à  $(\nabla_h^D \times \psi)_j = 0, \forall j \in [1, J]$ . Comme précédemment, puisque le domaine est connexe, il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\psi_k^P = \alpha, \forall k \in [1, K]$  et  $\psi_i^T = \beta, \forall i \in [1, I + J^\Gamma]$ . D'après (2.27),  $\psi = 0$  sur  $\Gamma_0$ , ce qui implique que  $\alpha$  et  $\beta$  sont nulles et nous avons bien

$$\psi_i^T = 0, \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \text{ et } \psi_k^P = 0, \forall k \in [1, K] .$$

□

Les formules (2.26) sont les analogues discrets (respectivement donnés sur les cellules primales et duales) de la condition  $\int_\Omega \phi = 0$  qui apparaît dans la définition de l'espace  $V$  dans (2.23), tandis que les formules (2.27) et (2.28) sont les analogues discrets des conditions aux limites qui apparaissent dans la définition de  $W$ .

**Remarque 2.1** Dans un domaine connexe, les gradient et rotationnel vecteur discrets d'un  $\phi = ((\phi_i^T), (\phi_k^P))$  s'annulent si et seulement si il existe deux constantes  $c^T$  et  $c^P$ , telles que  $\phi_i^T = c^T$  pour tout  $i$  et  $\phi_k^P = c^P$  pour tout  $k$ . Le fait que les constantes  $c^T$  et  $c^P$  puissent différer l'une de l'autre signifie que  $\phi$  présente en général des oscillations. Cependant, si on impose la moyenne discrète de  $\phi$  nulle (2.26), ou des conditions aux limites comme (2.27) et (2.28), ces oscillations ne peuvent pas être arbitraires. D'autre part, remarquons que ces oscillations n'apparaissent jamais pour  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$ , reconstruit par la formule (2.25).

**Remarque 2.2** Nous pouvons aussi écrire une décomposition similaire en changeant les conditions aux limites de la manière suivante

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \psi_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \psi_k^P = 0, \quad (2.31)$$

$$\phi_i^T = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \quad \phi_k^P = 0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \quad (2.32)$$

$$\forall q \in [1, Q], \quad \phi_i^T = c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \phi_k^P = c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q. \quad (2.33)$$

SYMBOLE	DESCRIPTION
$I$	Nombre de cellules du maillage primal
$J$	Nombre d'arêtes du maillage primal
$J^\Gamma$	Nombre d'arêtes du maillage primal situées sur la frontière $\Gamma$ (par convention, $j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$ ssi l'arête $j$ est sur $\Gamma$ )
$K$	Nombre de noeuds du maillage primal = Nombre de cellules duales (par convention, $k \in [K - K^\Gamma + 1, K]$ ssi le sommet $k$ est sur $\Gamma$ )
$T_i, i \in [1, I]$	Cellule du maillage primal
$ T_i $	Aire de $T_i$
$\theta_i^T, i \in [1, I]$	Fonction caractéristique de la cellule primale $T_i$
$G_i, i \in [1, I]$	Centre de gravité de $T_i$
$G_i, i \in [I + 1, I + J^\Gamma]$	Milieu d'une arête située sur $\Gamma$
$j(i), i \in [I + 1, I + J^\Gamma]$	Indice de l'arête frontière associée au point frontière $G_i$
$P_k, k \in [1, K]$	Cellule du maillage dual
$ P_k $	Aire de $P_k$
$\theta_k^P, k \in [1, K]$	Fonction caractéristique de la cellule duale $P_k$
$S_k, k \in [1, K]$	Sommet du maillage primal = Point associé à la cellule duale
$\tilde{A}_k, k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$	Intersection de $\Gamma$ et de la frontière de la cellule duale $P_k$
$\tilde{\mathbf{n}}_k, k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$	Vecteur normal unitaire sortant de $\tilde{A}_k$
$D_j, j \in [1, J]$	Cellule du maillage diamant
$ D_j $	Aire de $D_j$
$\theta_j^D, j \in [1, J - J^\Gamma]$	Fonction caractéristique de l'arête intérieure $A_j$
$\theta_j^\Gamma, j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$	Fonction caractéristique de l'arête frontière $A_j$
$i_1(j), i_2(j)$	Indices des cellules primales ayant $A_j$ comme arête commune
$k_1(j), k_2(j)$	Indices des sommets de l'arête $A_j$
$G_{i_\alpha(j)}, \alpha \in \{1, 2\}$	Sommets de la cellule diamant $D_j$ associés aux cellules primales $T_{i_\alpha(j)}$
$P_{k_\beta(j)}, \beta \in \{1, 2\}$	Sommets de la cellule diamant $D_j$ associés aux cellules duales $P_{k_\beta(j)}$
$A_j = [S_{k_1(j)} S_{k_2(j)}]$	Arête du maillage primal = Diagonale de la cellule diamant $D_j$
$ A_j $	Longueur de $A_j$
$A'_j = [G_{i_1(j)} G_{i_2(j)}]$	Diagonale de la cellule diamant $D_j$
$ A'_j $	Longueur de $A'_j$
$\mathbf{n}_j, j \in [1, J]$	Vecteur normal unitaire à $A_j$ , orienté de telle sorte que $\mathbf{G}_{i_1(j)} \mathbf{G}_{i_2(j)} \cdot \mathbf{n}_j \geq 0$
$\mathbf{n}'_j, j \in [1, J]$	Vecteur normal unitaire à $A'_j$ , orienté de telle sorte que $\mathbf{S}_{k_1(j)} \mathbf{S}_{k_2(j)} \cdot \mathbf{n}_j \geq 0$
$D_{j,1}, j \in [1, J]$	Triangle $S_{k_1(j)} G_{i_1(j)} S_{k_2(j)}$ associé à la cellule diamant $D_j$
$D_{j,2}, j \in [1, J]$	Triangle $S_{k_2(j)} G_{i_2(j)} S_{k_1(j)}$ associé à la cellule diamant $D_j$
$D'_{j,1}, j \in [1, J]$	Triangle $G_{i_2(j)} S_{k_1(j)} G_{i_1(j)}$ associé à la cellule diamant $D_j$
$D'_{j,2}, j \in [1, J]$	Triangle $G_{i_1(j)} S_{k_2(j)} G_{i_2(j)}$ associé à la cellule diamant $D_j$
$\mathcal{T}_{j,1}, j \in [1, J]$	Soit $D_{j,1}$ soit $D'_{j,1}$ selon le découpage local de $D_j$ par rapport à une de ses diagonales
$\mathcal{T}_{j,2}, j \in [1, J]$	Soit $D_{j,2}$ soit $D'_{j,2}$ selon le découpage local de $D_j$ par rapport à une de ses diagonales
$\mathcal{V}(i), i \in [1, I]$	Ensemble des entiers $j \in [1, J]$ tels que $A_j$ est une arête de $T_i$
$\mathcal{E}(k), k \in [1, K]$	Ensemble des entiers $j \in [1, J]$ tels que $S_k$ est un sommet de $A_j$
$s_{ji}, i \in [1, I], j \in \mathcal{V}(i)$	Vaut $+1$ ou $-1$ selon que $\mathbf{n}_j$ sort ou rentre dans $T_i$
$\mathbf{n}_{ji}, i \in [1, I], j \in \mathcal{V}(i)$	Vaut $s_{ji} \mathbf{n}_j$ = Vecteur normal unitaire à $A_j$ sortant de $T_i$
$s'_{jk}, k \in [1, K], j \in \mathcal{E}(k)$	Vaut $+1$ ou $-1$ selon que $\mathbf{n}'_j$ sort ou rentre dans $P_k$
$\mathbf{n}'_{jk}, k \in [1, K], j \in \mathcal{E}(k)$	Vaut $s'_{jk} \mathbf{n}'_j$ = Vecteur normal unitaire à $A'_j$ sortant de $P_k$
$M_j, j \in [1, J]$	Milieu de $A_j$
$M_{i_\alpha(j), k_\beta(j)}$	Milieu de $G_{i_\alpha(j)} S_{k_\beta(j)}$
$D_{j,\alpha,\beta}, (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$	Triangle $M_j G_{i_\alpha(j)} S_{k_\beta(j)}$
$A'_{j1}, A'_{j2}$	Segment $[G_{i_1(j)} M_j]$ , Segment $[M_j G_{i_2(j)}]$

TAB. 2.1 – Liste des notations.



## Chapitre 3

# Le problème Div-Rot

Ce chapitre est tiré de l'article [36] s'intitulant "A discrete duality finite volume method approach to Hodge decomposition and div-curl problems on almost arbitrary two-dimensional meshes" en collaboration avec Pascal Omnes et Komla Domelevo, et publié dans le SIAM Journal on numerical analysis.

### 3.1 Introduction

La discrétisation par des schémas basés sur une analyse vectorielle discrète satisfaisant des propriétés discrètes analogues aux propriétés continues usuelles conduisent à des approximations robustes et efficaces de modèles physiques variés. Basés sur des formulations en volumes finis, ces schémas fournissent des approximations discrètes d'opérateurs différentiels tels que le gradient, la divergence et le rotationnel.

De tels schémas furent par exemple construits par Hyman, Shashkov et co-auteurs, initialement sur des grilles quadrangulaires structurées. Nous nous référons à [64, 65] pour la construction d'opérateurs discrets et à [66] pour la preuve de la décomposition de Hodge discrète. Ces schémas furent alors appliqués dans différentes circonstances (voir [67, 68]) et étendus à des grilles non-structurées [24] ou même non-conformes [77], bien que sur ces types de maillages, à notre connaissance, aucune décomposition de Hodge discrète n'ait été prouvée.

Ce qui nous intéresse dans cette étude est lié à d'autres types de schémas tels que ceux proposés par Nicolaidis et co-auteurs pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides [29], des problèmes div-rot [82, 62] ou les équations de Maxwell [84]. Dans ces travaux, les schémas appelés "covolumes" sont restreints à des maillages bidimensionnels de triangles localement

équiangulaires, ce qui signifie que pour toute paire de triangles adjacents qui forme un convexe quadrilatéral, la somme des angles opposés au côté commun est au plus  $180^\circ$ . Étant donné un maillage primal triangulaire, on construit un maillage dual en joignant les centres des cercles circonscrits des triangles adjacents. De cette manière, les arêtes des maillages primaux et duals sont localement orthogonales. Cette propriété sera appelée par la suite "propriété d'orthogonalité". La nécessité pour le maillage de vérifier cette propriété peut être vue comme une sérieuse contrainte, en particulier dans le contexte de l'adaptation de maillages.

Dans [82], les composantes du champ discret sont définies comme étant normales aux arêtes primales et par conséquent, grâce à la propriété d'orthogonalité, tangentes aux arêtes du maillage dual. Cette seule composante est suffisante pour permettre la définition de l'opérateur divergence discrète sur le maillage primal et de l'opérateur rotationnel sur le maillage dual. Réciproquement, les analogues discrets des composantes normales (par rapport aux arêtes du maillage primal) de l'opérateur gradient (respectivement rotationnel vecteur) sont obtenus sur les arêtes à partir des quantités scalaires définies au centre des cercles circonscrits (resp. aux sommets) des cellules primales.

Compte tenu de l'anisotropie du milieu considéré dans [62], les auteurs sont amenés à introduire les deux composantes des champs de vecteurs sur les arêtes du maillage, ce qui leur permet de définir des opérateurs divergence et rotationnel discrets sur les maillages primal et dual à la fois. Cependant, ils gardent seulement en considération les composantes normales des vecteurs gradient et rotationnel discrets, laissant ainsi la généralisation de [82] incomplète.

Dans le présent travail, nous étendons les idées de la méthode de covolumes de Nicolaidis à des maillages bidimensionnels "arbitraires", incluant en particulier les maillages non-conformes. Ces maillages ne vérifient pas nécessairement la propriété d'orthogonalité et de plus, nous discrétisons les champs de vecteurs par rapport à leurs deux composantes sur les cellules-diamants, qui sont des quadrilatères dont les sommets sont les extrémités des arêtes primales et duales associées. Comme dans [62], les deux composantes du champ de vecteur nous permettent de définir des opérateurs divergence et rotationnel discrets sur les cellules primales et duales à la fois. Réciproquement, et à la différence de [62], les deux composantes des opérateurs gradient et rotationnel vecteur discrets sont définis sur les cellules-diamants à partir des quantités scalaires données sur les cellules primales et duales. Grâce à la définition des produits scalaires, nous avons établi dans le chapitre 2 que ces opérateurs discrets vérifient des propriétés discrètes analogues à celles vérifiées par leurs homologues continus :

les formules de Green discrètes, la décomposition de Hodge discrète de champs de vecteurs, les rotationnels vecteurs sont à divergence nulle et les gradients sont à rotationnel nul. Ces résultats généralisent alors ceux obtenus dans [62, 82], avec comme nouveauté majeure qu'ils s'utilisent sur une classe de maillages beaucoup plus grande.

Compte tenu des formules de Green discrètes, les schémas de volumes finis basés sur ces idées ont été nommés schémas de Volumes Finis en Dualité Discrète (DDFV) dans [35] et leur utilisation a commencé avec la construction et l'analyse d'une méthode de volumes finis pour l'équation de Laplace sur des maillages bidimensionnels "arbitraires" [40]. Puis, ces idées ont été appliquées à la discrétisation d'équations non-linéaires elliptiques [3], de modèles de dérive-diffusion et de transport d'énergie [25], et pour des problèmes d'électrocardiologie [94].

Dans ce chapitre, nous appliquons ces idées à la résolution numérique des problèmes div-rot que l'on retrouve par exemple en mécanique des fluides ainsi qu'en électrostatique et magnétostatique. En utilisant la décomposition de Hodge discrète du champ de vecteurs discret inconnu, ce problème est réécrit en deux problèmes de Laplace discrets indépendants, d'inconnues les potentiels discrets, comme justement dans le problème continu. En utilisant les résultats obtenus dans [40], nous prouvons la convergence du schéma lorsque les potentiels sont suffisamment réguliers et sous des hypothèses géométriques liées à la non-dégénérescence des cellules-diamants.

Ce chapitre est organisé comme suit : nous appliquons les idées décrites ci-dessus dans la section 3.2 pour discrétiser le problème div-rot et obtenir des estimations d'erreur. Quelques résultats numériques sont décrits en section 3.3.



## 3.2 Solution numérique du problème div-rot pour des domaines non simplement connexes

### 3.2.1 Discrétisation du problème div-rot avec conditions normales au bord

Nous nous intéressons à l'approximation du problème continu suivant : étant donnés  $f$ ,  $g$ ,  $\sigma$  et  $(k_q)_{q \in [1, Q]}$ , trouver  $\mathbf{u}$  tel que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \times \mathbf{u} = g & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Gamma_q} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = k_q, & \forall q \in [1, Q]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Une condition nécessaire pour la résolution du système est donnée par la formule de Green :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \, d\xi. \quad (3.2)$$

Nous choisissons de discrétiser la solution de ce problème par un vecteur  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  défini par ses valeurs sur les cellules-diamants du maillage. En utilisant les opérateurs différentiels discrets définis dans la section 2.2, et en suivant [62], on écrit les équations discrètes suivantes :

$$(\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = f_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (3.3a)$$

$$(\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = f_k^P, \quad \forall k \in [1, K], \quad (3.3b)$$

$$(\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i = g_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (3.3c)$$

$$(\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k = g_k^P, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \quad (3.3d)$$

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \quad (3.3e)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, 1)_{\Gamma_q, h} = k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \quad (3.3f)$$

$$\sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k = \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| g_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \quad (3.3g)$$

où nous avons posé

$$f_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall i \in [1, I], \quad f_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall k \in [1, K], \quad (3.4)$$

$$g_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall i \in [1, I], \quad g_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall k \in [1, K], \quad (3.5)$$

$$\sigma_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \sigma(\xi) \, d\xi, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]. \quad (3.6)$$

### 3.2. SOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DIV-ROT POUR DES DOMAINES NON SIMPLEMENT CONNEXES

---

En utilisant la décomposition de Hodge discrète de  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$ , le problème (3.3) peut être décomposé en deux problèmes indépendants impliquant les potentiels :

**Proposition 3.1** *Le problème (3.3) peut être décomposé en deux problèmes indépendants :*

*d'une part, trouver  $(\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  tel que*

$$(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_i = f_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (3.7a)$$

$$(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \phi)_k = f_k^P, \quad \forall k \in [1, K], \quad (3.7b)$$

$$(\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j = \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \quad (3.7c)$$

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0, \quad (3.7d)$$

*et d'autre part, trouver  $(\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que*

$$-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \psi)_i = g_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (3.8a)$$

$$-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k = g_k^P, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \quad (3.8b)$$

$$(\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q, h} = -k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \quad (3.8c)$$

$$-\sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k = \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| g_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \quad (3.8d)$$

$$\psi_i^T = \psi_k^P = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \forall k \in \Gamma_0, \quad (3.8e)$$

$$\forall q \in [1, Q], \quad \psi_i^T = c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad (3.8f)$$

$$\forall q \in [1, Q], \quad \psi_k^P = c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q. \quad (3.8g)$$

*Le vecteur  $\mathbf{u}$  est alors reconstruit par*

$$\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \phi)_j + (\nabla_h^D \times \psi)_j, \quad \forall j \in [1, J]. \quad (3.9)$$

**Preuve** Tout d'abord, la décomposition de Hodge discrète de  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  (Théorème 2.1) montre l'existence de  $(\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ ,  $(\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que (3.9), (3.7d) et (3.8e)-(3.8f)-(3.8g) sont vérifiés. Ensuite, en utilisant la propriété (2.19a), nous avons :

$$f_i^T = (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = (\nabla_h^T \cdot (\nabla_h^D \phi + \nabla_h^D \times \psi))_i = (\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_i, \quad \forall i \in [1, I].$$

De la même manière, en utilisant (2.19b),  $\psi_i^T = \psi_k^P = 0$  sur  $\Gamma_0$ ,  $\psi_i^T = c_q^T$  et  $\psi_k^P = c_q^P$  sur  $\Gamma_q$ ,  $\forall q \in [1, Q]$ , nous obtenons :

$$(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \phi)_k = f_k^P, \quad \forall k \in [1, K].$$

En ce qui concerne les conditions de bord, l'utilisation de (2.8) donne

$$(\nabla_h^D \times \psi)_j \cdot \mathbf{n}_j = -\frac{1}{2|D_j|} (\psi_{k_2} - \psi_{k_1}) |A'_j| \boldsymbol{\tau}'_j \cdot \mathbf{n}_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J].$$

Comme  $\psi_k^P = 0$  sur  $\Gamma_0$  et  $\psi_k^P = c_q^P$ ,  $\forall q \in [1, Q]$ , nous en déduisons que

$$(\nabla_h^D \times \psi)_j \cdot \mathbf{n}_j = 0, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J],$$

ce qui implique que

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = (\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j = \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J].$$

Comme précédemment, en utilisant (3.9), (3.3c)-(3.3d), (2.20) et la proposition 2.3, on peut prouver (3.8a)-(3.8b).

De plus,

$$(\nabla_h^D \phi)_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = \frac{1}{2|D_j|} \left( \phi_{k_2(j)}^T - \phi_{k_1(j)}^T \right) |A'_j| \mathbf{n}'_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j,$$

et en utilisant (2.18), on a

$$(\nabla_h^D \phi \cdot \boldsymbol{\tau}, 1)_{\Gamma_q, h} = \sum_{j \in \Gamma_q} \frac{|A_j| |A'_j|}{2|D_j|} \mathbf{n}'_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \left( \phi_{k_2(j)}^T - \phi_{k_1(j)}^T \right) = - \sum_{j \in \Gamma_q} \left( \phi_{k_2(j)}^T - \phi_{k_1(j)}^T \right),$$

qui s'annule puisque  $\Gamma_q$  est un contour fermé. Ainsi, (3.3f) implique (3.8c) parce que  $(\nabla_h^D \times \psi) \cdot \boldsymbol{\tau}_j = -\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}_j$ . Finalement, un calcul similaire à celui qui est décrit pour (2.21) montre que

$$(\nabla_h^P \times (\nabla_h^D \phi))_k = \frac{1}{|P_k|} (\phi_{I_2}^T - \phi_{I_1}^T) + \frac{1}{2|P_k|} (\phi_{K_1}^P - \phi_{K_2}^P)$$

pour les cellules frontières  $k \in [K - J^\Gamma + 1, K]$  (voir la figure 2.9 pour les notations). Ainsi, quand on somme ces contributions sur un contour fermé  $\Gamma_q$ , on obtient

$$\sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \times (\nabla_h^D \phi))_k = 0,$$

de sorte que (3.3g) implique (3.8d).

Réciproquement, soient  $(\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ ,  $(\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  les solutions des problèmes (3.7) et (3.8). Alors, en posant  $\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \phi)_j + (\nabla_h^D \times \psi)_j$ ,  $\forall j \in [1, J]$ , on déduit à l'aide des égalités énoncées ci-dessus que  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  est solution du problème (3.3).  $\square$

**Proposition 3.2** *Les problèmes (3.7) et (3.8) ont tous les deux une solution unique.*

**Preuve** En ce qui concerne le problème (3.7), l'existence et l'unicité de sa solution ont déjà été prouvées dans [40] si l'équivalent discret de (3.2) est vérifié :

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| f_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| f_k^P = \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| \sigma_j ,$$

ce qui est le cas ici parce que grâce aux définitions (3.4) et (3.6), nous avons

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| f_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| f_k^P = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ et } \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| \sigma_j = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) d\xi .$$

En ce qui concerne le problème (3.8), on dénombre  $I + K + J^\Gamma + 2Q$  inconnues alors que (3.8a) et (3.8b) fournissent respectivement  $I$  et  $K - J^\Gamma$  équations, auxquelles on ajoute  $2Q$  relations provenant de (3.8c) et (3.8d). Enfin, les conditions au bord (3.8e)-(3.8f)-(3.8g) donnent les  $2J^\Gamma$  équations manquantes pour que le système soit carré. Comme il y a autant d'équations que d'inconnues, il suffit de vérifier l'injectivité du système pour justifier l'unicité de la solution du système. Ainsi, posons  $g_i^T = g_k^P = k_q = 0$  dans le système (3.8) et calculons le produit scalaire discret suivant :  $(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \psi)_{T,P}$  (voir (2.2) pour la définition). Dans ce produit scalaire, la somme sur les indices  $i \in [1, I]$  et la somme sur les indices  $k \in [1, K - J^\Gamma]$  sont nulles grâce à (3.8a) et à (3.8b) respectivement. Ensuite, compte tenu de (3.8e), les contributions des indices  $k \in \Gamma_0$  sont aussi nulles, de telle sorte que

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \psi)_{T,P} = \frac{1}{2} \sum_{q \in [1, Q]} \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k \psi_k^P .$$

De plus, (3.8g) implique que

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \psi)_{T,P} = \frac{1}{2} \sum_{q \in [1, Q]} c_q^P \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k ,$$

qui vaut zéro grâce à (3.8d). D'autre part, la formule de Green discrète (2.13) permet d'écrire

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \psi)_{T,P} = -(\nabla_h^D \psi, \nabla_h^D \psi)_D + (\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, \psi)_{\Gamma, h} = 0 . \quad (3.10)$$

Étant données les conditions de bord (3.8e)-(3.8f)-(3.8g), on vérifie que

$$(\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, \psi)_{\Gamma, h} = \sum_{q \in [1, Q]} \frac{c_q^T + c_q^P}{2} (\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q, h} , \quad (3.11)$$

qui vaut zéro grâce à (3.8c). Ainsi, (3.10), (3.11) et la définition (2.3) impliquent que

$$(\nabla_h^D \psi, \nabla_h^D \psi)_D = \sum_{j \in [1, J]} |D_j| |\nabla_h^D \psi|^2 = 0 .$$

Par conséquent, de la même manière qu'à la fin de la preuve du théorème 2.1, nous déduisons que

$$\psi_i^T = 0, \quad \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \quad \text{et} \quad \psi_k^P = 0, \quad \forall k \in [1, K] ,$$

ce qui prouve l'unicité et ainsi l'existence.  $\square$

### 3.2.2 Le problème div-rot avec conditions tangentielles au bord

Nous cherchons maintenant à approcher le problème continu suivant : étant donnés  $f, g, \sigma$  et  $(k_q)_{q \in [1, Q]}$ , Trouver  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = f & \text{dans } \Omega , \\ \nabla \times \mathbf{u} = g & \text{dans } \Omega , \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma & \text{sur } \Gamma , \\ \int_{\Gamma_q} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = k_q, & \forall q \in [1, Q] . \end{cases}$$

Une condition nécessaire pour résoudre ce système est donnée par la formule de Green :  $\int_\Omega g \, d\mathbf{x} = \int_\Gamma \sigma(\xi) \, d\xi$ . Ce problème est discrétisé comme dans la partie 3.2.1 par un vecteur  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  défini par ses valeurs sur les cellules-diamants du maillage. En utilisant les opérateurs différentiels discrets définis dans la partie 2.2, on écrit les équations discrètes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = f_i^T, & \forall i \in [1, I] , \\ (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = f_k^P, & \forall k \in [1, K - J^\Gamma] , \\ (\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i = g_i^T, & \forall i \in [1, I] , \\ (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k = g_k^P, & \forall k \in [1, K] , \\ \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = \sigma_j, & \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J] , \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q, h} = k_q, & \forall q \in [1, Q] , \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| f_k^P, & \forall q \in [1, Q] . \end{array} \right. \quad (3.12)$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème sont prouvées similairement à la section 3.2.1 ; la principale différence réside dans le fait que la décomposition de Hodge est modifiée de la manière suivante :

**Théorème 3.1** Soit  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  un champ de vecteurs discret défini par ses valeurs sur les cellules-diamants  $D_j$ . Il existe  $\phi = (\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ ,  $\psi = (\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  uniques tels que :

$$\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \psi)_j + (\nabla_h^D \times \phi)_j, \quad \forall j \in [1, J], \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T &= \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0, \\ \psi_i^T &= 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \quad \psi_k^P = 0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \end{aligned}$$

et

$$\forall q \in [1, Q], \quad \psi_i^T = c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \psi_k^P = c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q.$$

De plus, la décomposition (3.13) est orthogonale.

Comme précédemment, le problème (3.12) se découple en deux sous-problèmes indépendants impliquant les potentiels.

**Proposition 3.3** Le problème (3.12) peut être découpé en deux problèmes indépendants :  
d'une part, trouver  $(\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  tel que

$$\begin{cases} -(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_i &= g_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \\ -(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \phi)_k &= g_k^P, \quad \forall k \in [1, K], \\ -(\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j &= \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \\ \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T &= \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0, \end{cases}$$

et d'autre part, trouver  $(\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$

$$\begin{cases} (\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \psi)_i &= f_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \\ (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k &= f_k^P, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ (\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q} &= k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k &= \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| f_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \psi_i^T &= \psi_k^P = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \\ \forall q \in [1, Q], \quad \psi_i^T &= c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \\ \forall q \in [1, Q], \quad \psi_k^P &= c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q. \end{cases}$$

Le vecteur  $\mathbf{u}$  est alors reconstruit de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \psi)_j + (\nabla_h^D \times \phi)_j, \quad \forall j \in [1, J].$$

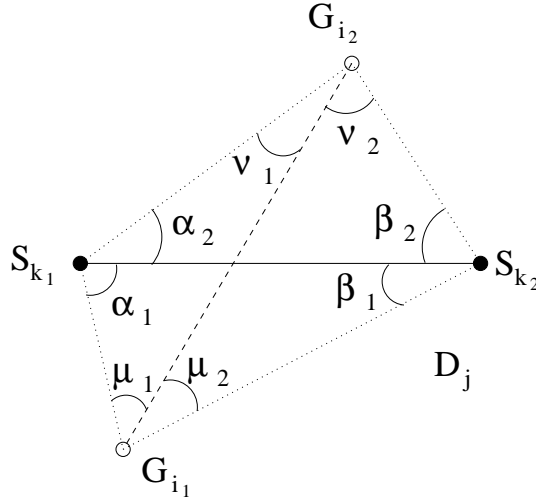


FIG. 3.1 – Notations pour le paragraphe 3.2.3.

### 3.2.3 Estimations d'erreur pour le problème div-rot

A la différence de [82], nous allons obtenir les estimations pour les potentiels impliqués dans la décomposition de Hodge de  $\mathbf{u}$ ; en effet, nous allons utiliser des estimations similaires à celles qui ont été obtenues dans [40]. Par simplicité, nous allons nous restreindre aux cas où toutes les cellules-diamants sont convexes; le cas des cellules-diamants non-convexes requiert des hypothèses additionnelles similaires à celles données dans [40]. Nous allons obtenir des estimations d'erreurs sous l'hypothèse suivante (voir les figures 2.5 et 3.1 pour les notations) :

**Hypothèse 3.1** *Il existe un angle  $\tau^*$ , strictement inférieur à  $\pi$  et indépendant du maillage, tel que :*

1. *Pour toute cellule-diamant intérieure  $D_j$ , le plus petit angle entre l'angle maximum du couple de triangles  $(D_{j,1}, D_{j,2})$  et l'angle maximum du couple de triangles  $(D'_{j,1}, D'_{j,2})$  est borné par  $\tau^*$  :*

$$\min(\max(\alpha_1, \beta_1, \mu_1 + \mu_2, \alpha_2, \beta_2, \nu_1 + \nu_2), \max(\mu_1, \nu_1, \alpha_1 + \alpha_2, \mu_2, \nu_2, \beta_1 + \beta_2)) \leq \tau^*$$

2. *Le plus grand angle de chacune des cellules-diamants frontières  $D_j$  est borné par l'angle  $\tau^*$ .*

Pour faire des estimations d'erreur, on suppose habituellement une certaine régularité de la solution du problème. Pour appliquer les résultats donnés dans [40], nous allons supposer une

régularité (Hyp. 3.2 ci-dessous) des potentiels introduits par la proposition suivante :

**Proposition 3.4** *Soit  $(f, g, \sigma)$  appartenant à  $L^2(\Omega)^2 \times H^{1/2}(\Gamma)$  et soit  $(k_q)_{q \in [1, Q]}$  un ensemble de nombres réels donnés; soit  $\hat{\mathbf{u}}$  la solution exacte du problème (3.1). Alors, il existe  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$  tous les deux dans  $H^1(\Omega)$  et un ensemble de nombres réels  $(C_q)_{q \in [1, Q]}$  tels que*

$$\hat{\mathbf{u}} = \nabla \hat{\phi} + \nabla \times \hat{\psi},$$

où  $\hat{\phi}$  est la solution de

$$\begin{cases} \Delta \hat{\phi} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \hat{\phi} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \sigma & \text{sur } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \hat{\phi} = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

et  $\hat{\psi}$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta \hat{\psi} = \nabla \times \hat{\mathbf{u}} = g & \text{dans } \Omega, \\ \hat{\psi}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \hat{\psi}|_{\Gamma_q} = C_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \int_{\Gamma_q} \nabla \hat{\psi} \cdot \mathbf{n} = -k_q. \end{cases} \quad (3.15)$$

**Preuve** La décomposition de Hodge de  $\hat{\mathbf{u}}$  et la détermination de  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$  par (3.14) et (3.15) sont les conséquences directes de [54, Théorème 3.2 et Corollaire 3.1].  $\square$

**Hypothèse 3.2** *On suppose que les potentiels  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$  donnés par la proposition 3.4 appartiennent à  $H^2(\Omega)$ .*

On remarque qu'à cause des angles rentrants liés aux frontières polygonales internes  $\Gamma_q$ , la régularité  $H^2$  des potentiels n'est pas une conséquence de la régularité des données  $(f, g, \sigma)$ .

Évidemment, on peut relier l'erreur  $L^2$  entre la solution  $\hat{\mathbf{u}}$  de (3.1) et la solution discrète  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  de (3.3) aux erreurs entre les solutions  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$  de (3.14) et (3.15) et les solutions discrètes  $(\phi_i^T, \phi_k^P)$  et  $(\psi_i^T, \psi_k^P)$  définies dans la proposition 3.1 respectivement par (3.7) et (3.8). En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} |\mathbf{u}_j - \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq & 2 \left( \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} |(\nabla_h^D \phi)_j - \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right. \\ & \left. + \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} |(\nabla_h^D \psi)_j - \nabla \hat{\psi}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$



### Équivalence avec une méthode d'éléments finis pour les potentiels

Afin d'évaluer les erreurs sur les potentiels, nous allons suivre [40] et réécrire (3.7) et (3.8) en une formulation éléments finis non-conformes équivalente. Rappelons que les points  $M_{i_\alpha(j)k_\beta(j)}$  sont illustrés sur la figure 2.3. On construit les fonctions suivantes :

**Proposition 3.5** *Étant donné  $(\phi_i^T, \phi_k^P) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  ; il existe une fonction  $\phi_h$  définie par*

$$\begin{aligned} (\phi_h)_{|D_j} &\in P^1(D_j), & \forall j \in [1, J], \\ \phi_h(M_{i_\alpha(j)k_\beta(j)}) &= \frac{1}{2}(\phi_{i_\alpha(j)}^T + \phi_{k_\beta(j)}^P), & \forall j \in [1, J], \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De plus, nous avons la propriété essentielle suivante :

$$(\nabla \phi_h)_{|D_j} = (\nabla_h^D \phi)_j \quad \forall j \in [1, J]. \quad (3.18)$$

**Preuve** La preuve est donnée dans [40]. Rappelons que la définition d'une fonction  $P^1(D_j)$  par ses valeurs en quatre points non alignés n'est en général pas possible. Mais dans le cas présent, notons encore  $\phi_h$  l'unique fonction définie en (3.17) et ses valeurs (3.18) pour les couples  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$ , sauf pour le couple  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  (soit en trois points). Puisque  $\phi_h$  est un polynôme du premier degré, nous pouvons écrire

$$\phi_h(M_{i_2k_2}) = \phi_h(M_{i_2k_1}) + \mathbf{M}_{i_2k_1} \mathbf{M}_{i_2k_2} \cdot \nabla \phi_h$$

et

$$\phi_h(M_{i_1k_2}) = \phi_h(M_{i_1k_1}) + \mathbf{M}_{i_1k_1} \mathbf{M}_{i_1k_2} \cdot \nabla \phi_h.$$

Mais puisque le quadrangle  $(\mathbf{M}_{i_1k_1}, \mathbf{M}_{i_1k_2}, \mathbf{M}_{i_2k_2}, \mathbf{M}_{i_2k_1})$  est un parallélogramme, l'égalité  $\mathbf{M}_{i_2k_1} \mathbf{M}_{i_2k_2} = \mathbf{M}_{i_1k_1} \mathbf{M}_{i_1k_2}$  assure que

$$\phi_h(M_{i_2k_2}) = \phi_h(M_{i_1k_2}) + \phi_h(M_{i_2k_1}) - \phi_h(M_{i_1k_1}).$$

Grâce aux définitions (3.17), cette valeur vaut exactement  $\frac{1}{2}(\phi_{i_2(j)}^T + \phi_{k_2(j)}^P)$ , ce qui assure bien l'existence de  $\phi_h$  défini par (3.17) appliqué aux quatre couples  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$  et (3.18). D'autre part, puisque  $\phi_h \in V_h$  est  $P^1$  sur  $D_j$ , son gradient y est constant. Donc

$$(\nabla \phi_h)_{D_j} = \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \nabla \phi_h \, d\mathbf{x}.$$

Par la formule de Green, cette quantité est aussi égale à

$$(\nabla \phi_h)_{D_j} = \frac{1}{|D_j|} \int_{\partial D_j} \phi_h(\xi) \mathbf{n}(\xi) \, d\xi. \quad (3.19)$$

Notons que  $\partial D_j$  est composé de quatre segments  $[G_{i_\alpha} S_{k_\beta}]$ , sur lesquels la restriction de  $\phi_h$  est aussi  $P^1$ . Ainsi, les quatre intégrales dans la formule (3.19) peuvent être évaluées de manière exacte par la règle du point milieu. Le milieu du segment  $[G_{i_\alpha} S_{k_\beta}]$  est par définition  $M_{i_\alpha k_\beta}$ , où les valeurs de  $\phi_h$  sont données par (3.17). En sommant les différentes contributions de  $\phi_{i_\alpha}^T$  et  $\phi_{k_\beta}^P$ , nous obtenons bien  $(\nabla \phi_h)_{|D_j} = (\nabla_h^D \phi)_j$ .  $\square$

**Définition 3.1** Nous allons dénoter par  $L$  l'opérateur linéaire qui associe  $\phi_h$ , défini par la proposition 3.5, à  $(\phi_i^T, \phi_k^P) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  donné. De plus, la solution de (3.7) est dans l'espace suivant :

$$V_N := \left\{ (\phi_i^T, \phi_k^P) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K : \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0 \right\}.$$

La solution de (3.8) est dans l'espace suivant :

$$V_D := \left\{ (\phi_i^T, \phi_k^P) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K : \phi_i^T = \phi_k^P = 0, \forall i \in \Gamma_0, \forall k \in \Gamma_0 \text{ et } \right. \\ \left. \exists (c_{q,\phi}^T, c_{q,\phi}^P) \in (\mathbb{R}^2)^Q \text{ tels que } \phi_i^T = c_{q,\phi}^T \forall i \in \Gamma_q, \text{ et } \phi_k^P = c_{q,\phi}^P, \forall k \in \Gamma_q \forall q \in [1, Q] \right\}.$$

**Remarque 3.1** On prouve facilement que l'opérateur linéaire  $L$  introduit dans la définition 3.1 est injectif sur  $V_N$  et sur  $V_D$ . Ainsi, pour tout  $\Phi_h$  dans  $L(V_N)$  ou dans  $L(V_D)$ , il existe un unique  $\Phi = (\Phi_i^T, \Phi_k^P)$  de  $\mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$ , soit dans  $V_N$ , soit dans  $V_D$ , de telle sorte que  $\Phi_h = L(\Phi)$ . Ces valeurs  $(\Phi_i^T, \Phi_k^P)$  sont utilisées par la suite dans les définitions de  $\Phi_h^*$  et  $\tilde{\Phi}_h$  associées aux  $\Phi_h$  respectivement par (3.23) et (3.24).

A partir de ces définitions, on peut vérifier les résultats suivants :

**Proposition 3.6** Le problème (3.7) revient à trouver  $\phi_h \in L(V_N)$ , tel que

$$a_h(\phi_h, \Phi_h) = \ell_N(\Phi_h), \forall \Phi_h \in L(V_N) \quad (3.20)$$

avec

$$a_h(\phi_h, \Phi_h) := \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla \Phi_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

$$\ell_N(\Phi_h) := - \int_{\Omega} f \Phi_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \sigma \tilde{\Phi}_h(\xi) d\xi, \quad (3.22)$$

où

$$\Phi_h^*(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in [1, I]} \Phi_i^T \theta_i^T(\mathbf{x}) + \sum_{k \in [1, K]} \Phi_k^P \theta_k^P(\mathbf{x}) \right), \quad (3.23)$$

et

$$\tilde{\Phi}_h(\xi) = \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} \frac{1}{4} \left( \Phi_{k_1(j)}^P + 2\Phi_{i_2(j)}^T + \Phi_{k_2(j)}^P \right) \theta_j^\Gamma(\xi), \quad (3.24)$$

où nous rappelons que  $\theta_i^T$ ,  $\theta_k^P$  et  $\theta_j^\Gamma$  sont respectivement les fonctions caractéristiques des cellules  $T_i$ ,  $P_k$  et de l'arête frontière  $A_j$ .

**Preuve** Supposons que  $\phi \in V_N$  est la solution de (3.7) ; alors en multipliant la première équation par  $\frac{1}{2}|T_i|\Phi_i^T$ , la seconde équation par  $\frac{1}{2}|P_k|\Phi_k^P$ , et en sommant sur tous les  $i \in [1, I]$  et tous les  $k \in [1, K]$ , on obtient

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \phi, \Phi)_{T,P} = (f, \Phi)_{T,P}. \quad (3.25)$$

Grâce à la formule de Green discrète (2.13), on peut réécrire le membre de gauche de (3.25) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} -(\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \Phi)_D + (\nabla_h^D \phi \cdot \mathbf{n}, \Phi)_{\Gamma,h} &= - \sum_{j \in [1, J]} |D_j| (\nabla_h^D \phi)_j \cdot (\nabla_h^D \Phi)_j \\ &+ \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| (\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j \times \frac{1}{4} \left( \Phi_{k_1(j)}^P + 2\Phi_{i_2(j)}^T + \Phi_{k_2(j)}^P \right). \end{aligned}$$

Ensuite, grâce à (3.18), et du fait que  $(\nabla_h^D \phi)_j \cdot (\nabla_h^D \Phi)_j$  est une constante sur  $D_j$ , on constate que

$$- \sum_{j \in [1, J]} |D_j| (\nabla_h^D \phi)_j \cdot (\nabla_h^D \Phi)_j = - \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla \Phi_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

De plus, d'après les conditions au bord données par la troisième équation de (3.7),

$$|A_j| (\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j = |A_j| \sigma_j = \int_{A_j} \sigma(\xi) d\xi,$$

de telle sorte que

$$|A_j| (\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j \times \frac{1}{4} (\Phi_{k_1}^P + 2\Phi_{i_2}^T + \Phi_{k_2}^P) = \int_{A_j} \sigma \left( \tilde{\Phi}_h \right)_{|A_j}(\xi) d\xi.$$

Finalement, le membre de gauche de (3.25) est égal à

$$-a_h(\phi_h, \Phi_h) + \int_{\Gamma} \sigma \tilde{\Phi}_h(\xi) d\xi.$$

Par définition de (2.2) et par l'égalité (3.4), et du fait que  $\Phi_i^T \theta_i^T(\mathbf{x})|_{T_i} = \Phi_i^T$  et  $\Phi_k^P \theta_k^P(\mathbf{x})|_{P_k} = \Phi_k^P$ , le membre de droite de (3.25) est égal à :

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in [1, I]} \Phi_i^T \theta_i^T(\mathbf{x}) + \sum_{k \in [1, K]} \Phi_k^P \theta_k^P(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x},$$

ce qui clôt cette partie de la preuve.

Réciproquement, soit  $\phi_h \in L(V_N)$  vérifiant (3.20) pour tout  $\Phi_h \in L(V_N)$ ; alors  $\phi = L^{-1}(\phi_h)$  vérifie la quatrième condition de (3.7) par définition de  $V_N$ . De plus, considérons une arête frontière d'indice  $j_0 \in [J - J^\Gamma + 1, J]$  et rappelons que l'indice  $i_2(j_0)$  est associé à l'inconnue située au milieu du segment  $A_{j_0}$ . Nous définissons  $\Phi_0 \in V_N$  par

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], (\Phi_0)_i^T = \delta_i^{i_2(j_0)} \text{ et } \forall k \in [1, K], (\Phi_0)_k^P = 0.$$

Autrement dit,  $\Phi_0$  est nul partout sauf sur le point milieu de  $A_{j_0}$ . Alors, en définissant  $(\Phi_0)_h = L(\Phi_0)$  et en utilisant la définition 2.1 ainsi que (3.23) et (3.24), nous avons évidemment les propriétés suivantes

$$(\nabla(\Phi_0)_h)|_{D_j} = 0 \text{ si } j \neq j_0 \text{ et } (\nabla(\Phi_0)_h)|_{D_{j_0}} = \frac{1}{2|D_{j_0}|} |A_{j_0}| \mathbf{n}_{j_0},$$

et

$$(\Phi_0)_h^*(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{et} \quad (\tilde{\Phi}_0)_h(\xi) = \frac{1}{2} \theta_{j_0}^\Gamma(\xi) \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Ensuite, nous en déduisons que

$$a_h(\phi_h, (\Phi_0)_h) = \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla (\Phi_0)_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{2} |A_{j_0}| (\nabla \phi_h)|_{D_{j_0}} \cdot \mathbf{n}_{j_0} = \frac{1}{2} |A_{j_0}| (\nabla_h^D \phi)_{j_0} \cdot \mathbf{n}_{j_0}$$

et

$$\ell_N((\Phi_0)_h) = - \int_{\Omega} f(\Phi_0)_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \sigma(\tilde{\Phi}_0)_h(\xi) d\xi = \int_{A_{j_0}} \frac{1}{2} \sigma(\xi) d\xi = \frac{1}{2} |A_{j_0}| \sigma_{j_0}.$$

Finalement, en écrivant (3.20) pour  $(\Phi_0)_h$ , les deux équations précédentes prouvent que  $\phi$  vérifie la condition au bord :

$$(\nabla_h^D \phi)_{j_0} \cdot \mathbf{n}_{j_0} = \sigma_{j_0}, \quad \forall j_0 \in [J - J^\Gamma + 1, J].$$

Ensuite, pour montrer (3.7a) pour toute cellule primale  $i_0 \in [1, I]$ , nous considérons son élément de base correspondant  $\Phi_1 \in V_N$  défini par

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], (\Phi_1)_i^T = \delta_i^{i_0} - \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \text{ et } \forall k \in [1, K], (\Phi_1)_k^P = 0.$$

Alors, en définissant  $(\Phi_1)_h = L(\Phi_1)$  et d'après (3.20), on peut écrire

$$\sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla (\Phi_1)_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} f(\Phi_1)_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \sigma(\tilde{\Phi}_1)_h(\xi) d\xi. \quad (3.26)$$

Afin d'évaluer le membre de droite de (3.26), nous allons considérer en plus  $\Phi \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  tel que

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], \Phi_i^T = \delta_i^{i_0} \text{ et } \forall k \in [1, K], \Phi_k^P = 0.$$

Notons que  $\Phi \notin V_N$  mais que son gradient discret (voir (2.7)) est égal à celui de  $\Phi_1$ . Grâce à cette égalité et à (3.18), nous avons

$$\sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla (\Phi_1)_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \Phi_1)_D = (\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \Phi)_D,$$

qui peut être transformé grâce à (2.13) en

$$- \left( \nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \phi, \Phi \right)_{T,P} + (\nabla_h^D \phi \cdot \mathbf{n}, \Phi)_{\Gamma, h}.$$

Grâce à la définition de  $\Phi$ , cette quantité est réduite à la contribution de  $i_0$ , ce qui prouve que le membre de gauche de (3.26) peut se réécrire

$$\sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \phi_h \cdot \nabla (\Phi_1)_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} |T_{i_0}| (\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_{i_0}. \quad (3.27)$$

Ensuite, on calcule le membre de droite de (3.26) :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f(\Phi_1)_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in [1, I]} \int_{T_i} \left( \delta_i^{i_0} - \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \right) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{T_{i_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}; \\ \int_{\Gamma} \sigma(\tilde{\Phi}_1)_h(\xi) d\xi &= \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} \int_{A_j} \sigma(\xi) \frac{1}{4} \left( -2 \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \right) d\xi = -\frac{1}{2} \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

de telle sorte que le membre de droite de (3.26) est encore égal à

$$-\frac{1}{2} \int_{T_{i_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \frac{|T_{i_0}|}{|\Omega|} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) d\xi.$$

Compte tenu de (3.2), les deux derniers termes de la somme précédente se compensent et on obtient

$$- \int_{\Omega} f(\Phi_1)_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \sigma(\tilde{\Phi}_1)_h(\xi) d\xi = -\frac{1}{2} \int_{T_{i_0}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} |T_{i_0}| f_{i_0}^T. \quad (3.28)$$

En comparant (3.26), (3.27) et (3.28), on en déduit que

$$(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \phi)_{i_0} = f_{i_0}^T.$$

On peut prouver de manière similaire, en considérant  $k_0 \in [1, K]$  et  $\Phi_2 \in V_N$ , définis par

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], (\Phi_2)_i^T = 0 \text{ et } \forall k \in [1, K], (\Phi_2)_k^P = \delta_k^{k_0} - \frac{|P_{k_0}|}{|\Omega|}$$

que

$$(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \phi)_{k_0} = f_{k_0}^P,$$

ce qui termine la preuve de l'équivalence. □

**Proposition 3.7** *Le problème (3.8) est équivalent à trouver  $\psi_h \in L(V_D)$ , tel que  $\forall \Psi_h \in L(V_D)$ ,*

$$a_h(\psi_h, \Psi_h) = \ell_D(\Psi_h) \tag{3.29}$$

avec

$$\ell_D(\Psi_h) := \int_{\Omega} g \Psi_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{q \in [1, Q]} k_q \left( \frac{c_{q, \Psi}^T + c_{q, \Psi}^P}{2} \right).$$

**Preuve** Supposons que  $\psi \in V_D$  est la solution de (3.8); alors on peut calculer le produit scalaire discret suivant :

$$\begin{aligned} -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \Psi)_{T,P} = & - \frac{1}{2} \sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \psi)_i \Psi_i^T \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k \in [1, K - J^\Gamma]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k \Psi_k^P \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k \in [K - J^\Gamma + 1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k \Psi_k^P. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Compte tenu de (3.8a)-(3.8b), la somme des deux premiers termes du membre de droite (3.30) est égal à

$$\frac{1}{2} \sum_{i \in [1, I]} |T_i| g_i^T \Psi_i^T + \frac{1}{2} \sum_{k \in [1, K - J^\Gamma]} |P_k| g_k^P \Psi_k^P.$$

Ensuite, en utilisant le fait que  $\Psi^P$  est égal à une constante  $c_{q,\Psi}^P$  sur chaque  $\Gamma_q$  et s'annule sur  $\Gamma_0$ , on peut écrire, d'après (3.8d)

$$\begin{aligned}
 - \sum_{k \in [K-J^\Gamma+1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k \Psi_k^P &= - \sum_{q \in [1, Q]} c_{q,\Psi}^P \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k \\
 &= \sum_{q \in [1, Q]} c_{q,\Psi}^P \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| g_k^P \\
 &= \sum_{k \in [K-J^\Gamma+1, K]} |P_k| g_k^P \Psi_k^P .
 \end{aligned}$$

Finalement, (3.30) peut être réécrite de la manière suivante :

$$-(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \Psi)_{T,P} = (g, \Psi)_{T,P} . \quad (3.31)$$

En utilisant la formule de Green discrète (2.13), le membre de gauche de (3.31) vaut encore

$$(\nabla_h^D \psi, \nabla_h^D \Psi)_D - (\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, \Psi)_{\Gamma,h} .$$

Comme précédemment, le premier de ces termes est égal à  $a_h(\psi_h, \Psi_h)$ . Ensuite, en utilisant le fait que  $\Psi^P$  (respectivement  $\Psi^T$ ) est égal à une constante  $c_{q,\Psi}^P$  (resp.  $c_{q,\Psi}^T$ ) sur chaque  $\Gamma_q$  et s'annule sur  $\Gamma_0$ , et en utilisant (3.8c), on obtient

$$(\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, \Psi)_{\Gamma,h} = \sum_{q \in [1, Q]} \left( \frac{c_{q,\Psi}^T + c_{q,\Psi}^P}{2} \right) \sum_{\Gamma_q} (\nabla_h^D \psi)_j \cdot \mathbf{n}_j = - \sum_{q \in [1, Q]} k_q \left( \frac{c_{q,\Psi}^T + c_{q,\Psi}^P}{2} \right) ,$$

ce qui montre que le membre de gauche de (3.31) vaut finalement

$$a_h(\psi_h, \Psi_h) + \sum_{q \in [1, Q]} k_q \left( \frac{c_{q,\Psi}^T + c_{q,\Psi}^P}{2} \right) .$$

Ceci termine cette partie de la preuve.

Réciproquement, si  $\psi_h \in L(V_D)$  satisfait (3.29) pour tout  $\Psi_h \in L(V_D)$ , alors  $\psi = L^{-1}(\psi_h)$  vérifie (3.8e), (3.8f) et (3.8g) par définition de  $V_D$ . Ensuite, considérons un  $i_0 \in [1, I]$  donné et choisissons  $\Psi_1 \in V_D$  défini par

$$(\Psi_1)_i^T = \delta_i^{i_0}, \quad \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \quad \text{et} \quad (\Psi_1)_k^P = 0, \quad \forall k \in [1, K] .$$

Puisque  $\psi_h$  et  $\Psi_h$  satisfont (3.18), alors le membre de gauche de (3.29) s'écrit

$$a_h(\psi_h, (\Psi_1)_h) = \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \psi_h \cdot \nabla (\Psi_1)_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \sum_{j \in [1, J]} (\nabla_h^D \psi)_j \cdot (\nabla_h^D \Psi_1)_j = (\nabla_h^D \psi, \nabla_h^D \Psi_1)_D .$$

Ensuite, en appliquant la formule de Green (2.13) et les valeurs de  $\Psi_1$ , la ligne précédente se réécrit

$$a_h(\psi_h, (\Psi_1)_h) = -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi, \Psi_1)_{T,P} + (\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, \Psi_1)_{\Gamma,h} = -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi)_{i_0}.$$

D'autre part, par définition de  $\Psi_1$ , il est clair que  $c_{q,\Psi}^T = c_{q,\Psi}^P = 0$  et, en utilisant (3.5) et (3.23), on en déduit le membre de droite de (3.29)

$$\ell_D(\Psi_h) = \int_{\Omega} g \Psi_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{q \in [1,Q]} k_q \left( \frac{c_{q,\Psi}^T + c_{q,\Psi}^P}{2} \right) = \int_{\Omega} g \Psi_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (g, \Psi_1)_{T,P} = g_{i_0}^T.$$

Autrement dit, l'équation (3.8a) est vérifiée pour le  $i_0 \in [1, I]$  considéré. De la même manière, en considérant un  $k_0 \in [1, K - J^\Gamma]$  donné et en choisissant  $\Psi_2 \in V_D$  défini par

$$(\Psi_2)_i^T = 0, \quad \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \quad \text{et} \quad (\Psi_2)_k^P = \delta_k^{k_0}, \quad \forall k \in [1, K]$$

on obtient (3.8b) pour le  $k_0 \in [1, K - J^\Gamma]$  considéré.

Ensuite, considérons un  $q_0 \in [1, Q]$  donné et définissons  $\Psi_3 \in V_D$  par

$$(\Psi_3)_i^T = (\Psi_3)_k^P = 0, \quad \forall i \in [1, I], \quad \forall k \in [1, K] \quad \text{et} \quad (\Psi_3)_i^T = \delta_i^{q_0}, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [0, Q].$$

En appliquant (3.29) pour  $\Psi_h = L(\Psi_3)$  et en utilisant (3.18) et (2.13), on montre que (3.8c) est vérifié pour le  $q_0 \in [1, Q]$  considéré. De la même manière, en considérant un  $q_0 \in [1, Q]$  donné et en choisissant  $\Psi_4 \in V_D$  défini par

$$\begin{aligned} (\Psi_4)_i^T &= 0, \quad \forall i \in [1, I], \quad (\Psi_4)_k^P = 0, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ (\Psi_4)_i^T &= \delta_i^{q_0}, \quad \forall i \in \Gamma_q \quad \text{et} \quad (\Psi_4)_k^P = -\delta_k^{q_0}, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [0, Q], \end{aligned}$$

on obtient (3.8d) pour le  $q_0 \in [1, Q]$  considéré, ce qui termine la preuve de la proposition 3.7.  $\square$

### Estimations d'erreur pour les potentiels

On peut maintenant se tourner vers les estimations d'erreur concernant les potentiels  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\psi}$ . D'abord, étant donnée la formulation éléments finis équivalente donnée par la proposition 3.6 (respectivement la proposition 3.7), on peut étudier l'erreur numérique concernant  $\hat{\phi}$  (resp.  $\hat{\psi}$ ) de manière traditionnelle en notant que  $a_h$  agit sur  $H^1 + L(V_N)$  (resp.  $H^1 + L(V_D)$ ), sur lequel on définit  $|x|_{1,h} := \sqrt{a_h(x, x)}$ , et en utilisant le “second lemme de Strang” [104] :

$$|\hat{\phi} - \phi_h|_{1,h} \leq 2 \inf_{\omega_h \in L(V_N)} |\hat{\phi} - \omega_h|_{1,h} + \sup_{\omega_h \in L(V_N)} \frac{|a_h(\hat{\phi}, \omega_h) - \ell_N(\omega_h)|}{|\omega_h|_{1,h}} \quad (3.32)$$



et

$$|\widehat{\psi} - \psi_h|_{1,h} \leq 2 \inf_{\omega_h \in L(V_D)} |\widehat{\psi} - \omega_h|_{1,h} + \sup_{\omega_h \in L(V_D)} \frac{|a_h(\widehat{\psi}, \omega_h) - \ell_D(\omega_h)|}{|\omega_h|_{1,h}}. \quad (3.33)$$

Le premier terme du membre de droite de (3.32) et (3.33) est appelé “erreur d’interpolation”, tandis que le second est appelé “erreur de consistance”.

**Erreur d’interpolation pour  $\widehat{\phi}$  :** On commence avec

**Proposition 3.8** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C(\tau^*)$  dépendant seulement de  $\tau^*$  telle que*

$$\inf_{\omega_h \in L(V_N)} |\widehat{\phi} - \omega_h|_{1,h} \leq C(\tau^*) h \|\widehat{\phi}\|_{2,\Omega}. \quad (3.34)$$

**Preuve** Puisque  $\widehat{\phi} \in H^2(\Omega)$ , alors  $\widehat{\phi} \in C^0(\Omega)$ . On peut donc considérer la projection point par point de la solution exacte sur  $\mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K$  :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad (\Pi\widehat{\phi})_i^T &= \widehat{\phi}(G_i), \\ \forall k \in [1, K], \quad (\Pi\widehat{\phi})_k^P &= \widehat{\phi}(S_k). \end{aligned}$$

Ensuite, cet élément est lui-même projeté sur  $V_N$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad (\widetilde{\Pi}\widehat{\phi})_i^T &= (\Pi\widehat{\phi})_i^T - \frac{\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\Pi\widehat{\phi})_i^T}{|\Omega|} \\ \forall k \in [1, K], \quad (\widetilde{\Pi}\widehat{\phi})_k^P &= (\Pi\widehat{\phi})_k^P - \frac{\sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\Pi\widehat{\phi})_k^P}{|\Omega|}. \end{aligned}$$

Évidemment,  $\widetilde{\Pi}\widehat{\phi}$  et  $\Pi\widehat{\phi}$  ont le même gradient discret de telle sorte que l’erreur d’interpolation de (3.34) est bornée de la manière suivante :

$$\inf_{\omega_h \in L(V_N)} |\widehat{\phi} - \omega_h|_{1,h} \leq |\widehat{\phi} - L(\widetilde{\Pi}\widehat{\phi})|_{1,h} = |\widehat{\phi} - L(\Pi\widehat{\phi})|_{1,h}.$$

Enfin, une majoration a été donnée dans [40] pour  $|\widehat{\phi} - L(\Pi\widehat{\phi})|_{1,h}$  et celle-ci est basée sur la relation entre  $L(\Pi\widehat{\phi})$  et l’interpolant de Lagrange standard  $P^1$  sur les paires  $(D_{j,1}, D_{j,2})$  et  $(D'_{j,1}, D'_{j,2})$ . On aboutit alors à l’estimation (3.34). L’hypothèse 3.1 est là pour assurer que la condition, appelée condition de l’angle maximum [8, 69], est vérifiée pour au moins une des deux paires de triangles  $(D_{j,1}, D_{j,2})$  ou  $(D'_{j,1}, D'_{j,2})$ .  $\square$

**Erreur de consistance pour  $\widehat{\phi}$  :** Soit  $\omega_h = L(\omega)$ . Grâce à (3.21) et à (3.22), on commence par écrire

$$a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) - \ell_N(\omega_h) = \left[ a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) + (f, \omega_h)_\Omega - \int_\Gamma \sigma \widetilde{\omega}_h(\xi) d\xi \right] - (f, \omega_h - \omega_h^*)_\Omega. \quad (3.35)$$

Le dernier terme de (3.35) peut être borné par le lemme suivant :

**Lemme 3.1** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes, il existe une constante  $C$  indépendante du maillage telle que*

$$|(f, \omega_h - \omega_h^*)_\Omega| \leq C h \|f\|_{0,\Omega} |\omega_h|_{1,h}. \quad (3.36)$$

**Preuve** La preuve est identique à celle donnée dans [40] pour les conditions homogènes de Dirichlet.  $\square$

Ensuite, on suit [40] avec une légère modification due aux conditions non homogènes de Neumann au bord. On divise chaque cellule-diamant *intérieure*  $D_j$  (avec  $j \in [1, J - J^\Gamma]$ ) soit en  $D_{j,1} \cup D_{j,2}$ , soit en  $D'_{j,1} \cup D'_{j,2}$  (voir figure 2.5). Notons que ce choix est local à  $D_j$  et qu'il n'influence pas le choix qui a été fait pour la division de  $D_{j'}$ , pour  $j' \neq j$ . Les cellules-diamants frontières sont telles que  $D_{j,1} = D_j$  et  $D_{j,2} = \emptyset$  et ne seront jamais découpées en  $D'_{j,1} \cup D'_{j,2}$ . Pour simplifier les notations, nous avons adopté au chapitre 2 la notation  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$  pour représenter soit  $D_{j,\alpha}$  soit  $D'_{j,\alpha}$ . De plus, on définit  $RT(\nabla \widehat{\phi})$ , l'interpolation de Raviart-Thomas de  $\nabla \widehat{\phi}$  sur chaque  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$  (voir [98]) par

$$RT(\nabla \widehat{\phi})|_{\mathcal{T}_{j,\alpha}} \in (P_0(\mathcal{T}_{j,\alpha}))^2 \oplus \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} P_0(\mathcal{T}_{j,\alpha})$$

et

$$\int_s RT(\nabla \widehat{\phi}) \cdot \mathbf{n} d\xi = \int_s \nabla \widehat{\phi} \cdot \mathbf{n} d\xi$$

pour toute arête  $s$  de  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$  dont le vecteur unitaire normal extérieur est noté  $\mathbf{n}$ . On peut vérifier le lemme suivant :

**Lemme 3.2** *Soit  $\widehat{\phi}$  la solution de (3.14) et soit  $\omega_h \in L(V_N)$ . Alors si toutes les cellules-diamants sont convexes*

$$\begin{aligned} a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) + (f, \omega_h)_\Omega - \int_\Gamma \sigma \widetilde{\omega}_h(\xi) d\xi = \\ \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\mathcal{T}_{j,\alpha}} \left[ (\nabla \widehat{\phi} - RT(\nabla \widehat{\phi})) \cdot \nabla \omega_h - f \left( \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} - \omega_h \right) \right] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

où  $\langle \omega_h \rangle_{j,\alpha}$  est la valeur moyenne de  $\omega_h$  sur  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$ .

**Preuve** Par définition,  $RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n}$  est constant sur chaque arête de  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$ . De plus, sur deux triangles voisins  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$ , les valeurs de  $RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n}$  sur les deux arêtes de leur face commune sont opposées l'une de l'autre à cause de l'orientation du vecteur normal  $\mathbf{n}$ . En notant  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les arêtes de tous les  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$ ,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal unitaire à l'arête  $s$  dans  $\mathcal{S}$ , et  $[\omega_h]_s$  le saut de  $\omega_h$  à travers  $s$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial \mathcal{T}_{j,\alpha}} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} \omega_h d\xi &= \sum_{s \in \mathcal{S}, s \not\subset \Gamma} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} \int_s [\omega_h]_s d\xi \\ &+ \sum_{s \in \mathcal{S}, s \subset \Gamma} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} \int_s \omega_h d\xi. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Comme  $\omega_h$  est dans  $L(V_N)$ , alors  $[\omega_h]_s$  est un polynôme de degré 1, qui s'annule au milieu de  $s$  (par construction des fonctions de  $L(V_N)$ ). Son intégrale sur  $s$  est donc nulle. De plus, il y a une correspondance évidente entre un  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \subset \Gamma$  donné et une arête frontière  $A_j$ , avec  $j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$  (parce que les cellules-diamants frontières sont telles que  $D_j = D_{j,1} = \mathcal{T}_{j,\alpha}$ , avec  $\alpha = 1$ ). Ainsi, pour de tels  $s \in \mathcal{S}$ ,  $s \subset \Gamma$ , il existe un unique  $j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$  tel que

$$RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n}_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \nabla \hat{\phi} \cdot \mathbf{n}_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \sigma(\xi) d\xi.$$

Par ailleurs, sur ce  $A_j$ , la fonction  $\omega_h$  est un polynôme de degré 1 qui vaut  $\frac{\omega_{k_1}^P + \omega_{i_2}^T}{2}$  au milieu de  $[S_{k_1} G_{i_2}]$  et  $\frac{\omega_{i_2}^T + \omega_{k_2}^P}{2}$  au milieu de  $[G_{i_2} S_{k_2}]$ , et dont l'intégrale est facile à calculer :

$$\int_s \omega_h d\xi = \frac{|A_j|}{4} (\omega_{k_1}^P + 2\omega_{i_2}^T + \omega_{k_2}^P). \quad (3.39)$$

En rappelant la définition (3.24) de la fonction constante par morceaux  $\tilde{\omega}_h$ , on peut finalement écrire :

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial \mathcal{T}_{j,\alpha}} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} \omega_h d\xi = \sum_{s \in \mathcal{S}, s \subset \Gamma} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \mathbf{n} \int_s \omega_h d\xi = \int_\Gamma \sigma \tilde{\omega}_h(\xi) d\xi.$$

Mais nous pouvons aussi réécrire l'égalité ci-dessus grâce à la formule de Green sur  $\mathcal{T}_{j,\alpha}$  de la manière suivante

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \int_{\mathcal{T}_{j,\alpha}} \nabla \cdot (RT(\nabla \hat{\phi})) \omega_h d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{T}_{j,\alpha}} RT(\nabla \hat{\phi}) \cdot \nabla \omega_h d\mathbf{x} \right) = \int_\Gamma \sigma \tilde{\omega}_h(\xi) d\xi.$$

En soustrayant cette égalité à  $a_h(\widehat{\phi}, \omega_h)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) - \int_{\Gamma} \sigma \widetilde{\omega}_h(\xi) d\xi &= \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{T_{j,\alpha}} (\nabla \widehat{\phi} - RT(\nabla \widehat{\phi})) \cdot \nabla \omega_h d\mathbf{x} \\ &- \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{T_{j,\alpha}} \nabla \cdot (RT(\nabla \widehat{\phi})) \omega_h d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Notons  $\langle \omega_h \rangle_{j,\alpha}$  la valeur moyenne de  $\omega_h$  sur  $T_{j,\alpha}$ . Puisque  $\nabla \cdot (RT(\nabla \widehat{\phi}))$  est, par construction, une constante sur  $T_{j,\alpha}$ , on peut écrire les séries d'égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{T_{j,\alpha}} \nabla \cdot (RT(\nabla \widehat{\phi})) \omega_h d\mathbf{x} &= \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} \int_{T_{j,\alpha}} \nabla \cdot (RT(\nabla \widehat{\phi})) d\mathbf{x} = \\ \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} \int_{\partial T_{j,\alpha}} RT(\nabla \widehat{\phi}) \cdot \mathbf{n} d\xi &= \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} \int_{\partial T_{j,\alpha}} \nabla \widehat{\phi} \cdot \mathbf{n} d\xi = \\ \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} \int_{T_{j,\alpha}} \Delta \widehat{\phi} d\mathbf{x} &= \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} \int_{T_{j,\alpha}} f d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ainsi, l'égalité (3.37) découle de (3.40) et (3.41).  $\square$

Le premier terme du membre de droite de (3.35) peut être borné par le lemme suivant

**Lemme 3.3** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C$  indépendante du maillage telle que*

$$\left| a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) + (f, \omega_h)_{\Omega} - \int_{\Gamma} \sigma \widetilde{\omega}_h(\xi) d\xi \right| \leq C \frac{h}{\sin \tau^*} |\omega_h|_{1,h} \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|\widehat{\phi}\|_{2,\Omega} \right). \quad (3.42)$$

**Preuve** En vertu du lemme 3.2, majorer le membre de gauche de (3.42) revient à majorer le membre de droite de (3.37). La démarche est décrite dans [40]. De nouveau, l'hypothèse 3.1 est là pour assurer la condition de l'angle maximum requise par l'interpolation de Raviart-Thomas de  $\nabla \widehat{\phi}$ , voir [1].  $\square$

Nous terminons l'estimation de l'erreur de consistance avec :

**Proposition 3.9** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C$  indépendante du maillage telle que*

$$\sup_{\omega_h \in L(V_N)} \frac{|a_h(\widehat{\phi}, \omega_h) - \ell_N(\omega_h)|}{|\omega_h|_{1,h}} \leq C \frac{h}{\sin \tau^*} \left( \|f\|_{0,\Omega} + \|\widehat{\phi}\|_{2,\Omega} \right). \quad (3.43)$$

**Preuve** Le résultat découle de (3.35), (3.36) et (3.42).  $\square$

**Erreur d'interpolation pour  $\widehat{\psi}$  :** Ensuite, étant donnée la formulation éléments finis équivalente présentée dans la proposition 3.7, on peut étudier l'erreur numérique concernant  $\psi$  de manière tout à fait analogue : l'erreur d'interpolation est bornée en choisissant  $\omega_h = L(\Pi\widehat{\psi})$  avec  $\Pi\widehat{\psi} \in V_D$  défini par :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad (\Pi\widehat{\psi})_i^T &= \widehat{\psi}(G_i) \\ \forall k \in [1, K], \quad (\Pi\widehat{\psi})_k^P &= \widehat{\psi}(S_k) \end{aligned}$$

et on obtient un résultat analogue à (3.34) :

**Proposition 3.10** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C(\tau^*)$  dépendant seulement de  $\tau^*$  telle que*

$$\inf_{\omega_h \in L(V_D)} |\widehat{\psi} - \omega_h|_{1,h} \leq C(\tau^*) h \|\widehat{\psi}\|_{2,\Omega}. \quad (3.44)$$

**Erreur de consistance  $\widehat{\psi}$  :** Concernant l'erreur de consistance, on peut prouver un résultat analogue à l'équation (3.37) :

**Lemme 3.4** *Soit  $\widehat{\psi}$  la solution de (3.15) et soit  $\omega_h \in L(V_D)$ . Alors, si toutes les cellules-diamants sont convexes,*

$$\begin{aligned} a_h(\widehat{\psi}, \omega_h) - (g, \omega_h)_\Omega + \sum_{q \in [1, Q]} k_q \left( \frac{c_{q,\omega}^T + c_{q,\omega}^P}{2} \right) = \\ \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{T_{j,\alpha}} \left[ (\nabla \widehat{\psi} - RT(\nabla \widehat{\psi})) \cdot \nabla \omega_h + g \left( \langle \omega_h \rangle_{j,\alpha} - \omega_h \right) \right] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

**Preuve** Pour prouver ce résultat, on commence par écrire pour  $\widehat{\psi}$  une égalité analogue à l'équation (3.38). Pour les mêmes raisons que dans la preuve du lemme 3.2, cela revient à évaluer uniquement la partie sur la frontière. En raisonnant comme pour (3.39) et en utilisant le fait que  $\omega_h \in L(V_D)$ , on en déduit que

$$\int_{A_j} \omega_h d\xi = |A_j| \left( \frac{c_{q,\omega}^T + c_{q,\omega}^P}{2} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial T_{j,\alpha}} RT(\nabla \widehat{\psi}) \cdot \mathbf{n} \omega_h d\xi &= \sum_{q \in [1, Q]} \sum_{j \in \Gamma_q} RT(\nabla \widehat{\psi}) \cdot \mathbf{n}_j \int_{A_j} \omega_h d\xi \\ &= \sum_{q \in [1, Q]} \left( \frac{c_{q,\omega}^T + c_{q,\omega}^P}{2} \right) \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| RT(\nabla \widehat{\psi}) \cdot \mathbf{n}_j. \end{aligned}$$

Par définition,  $|A_j|RT(\nabla\widehat{\psi}) \cdot \mathbf{n}_j = \int_{A_j} \nabla\widehat{\psi} \cdot \mathbf{n}_j$  et grâce à (3.15), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\partial T_{j, \alpha}} RT(\nabla\widehat{\psi}) \cdot \mathbf{n} \omega_h d\xi &= \sum_{q \in [1, Q]} \left( \frac{c_{q, \omega}^T + c_{q, \omega}^P}{2} \right) \sum_{j \in \Gamma_q} \int_{A_j} \nabla\widehat{\psi} \cdot \mathbf{n}_j \\ &= \sum_{q \in [1, Q]} \left( \frac{c_{q, \omega}^T + c_{q, \omega}^P}{2} \right) \int_{\Gamma_q} \nabla\widehat{\psi} \cdot \mathbf{n}_j \\ &= - \sum_{q \in [1, Q]} k_q \left( \frac{c_{q, \omega}^T + c_{q, \omega}^P}{2} \right). \end{aligned}$$

La fin de la preuve de (3.45) est exactement la même que celle de (3.37).  $\square$

Ensuite, la majoration du membre de droite de (3.45) se fait comme dans [40] et on obtient un résultat analogue à (3.43) :

**Proposition 3.11** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C$  indépendante du maillage telle que*

$$\sup_{\omega_h \in L(V_D)} \frac{|a_h(\widehat{\psi}, \omega_h) - \ell_D(\omega_h)|}{|\omega_h|_{1, h}} \leq C \frac{h}{\sin \tau^*} \left( \|g\|_{0, \Omega} + \|\widehat{\psi}\|_{2, \Omega} \right). \quad (3.46)$$

En résumé, les estimées (3.32), (3.34) et (3.43) d'une part, et (3.33), (3.44) et (3.46) d'autre part nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.2** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C(\tau^*)$  indépendante du maillage telle que*

$$|\widehat{\phi} - \phi_h|_{1, h} \leq C(\tau^*)h \left( \|f\|_{0, \Omega} + \|\widehat{\phi}\|_{2, \Omega} \right) \quad (3.47)$$

et

$$|\widehat{\psi} - \psi_h|_{1, h} \leq C(\tau^*)h \left( \|g\|_{0, \Omega} + \|\widehat{\psi}\|_{2, \Omega} \right). \quad (3.48)$$

Finalement, en conclusion du paragraphe 3.2.3, les estimées (3.47), (3.48), ainsi que (3.16) et (3.18) nous permettent d'écrire :

**Théorème 3.3** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes et sous les hypothèses 3.1 et 3.2, il existe une constante  $C(\tau^*)$  indépendante du maillage telle que*

$$\left( \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} |\mathbf{u}_j - \widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^2 \right)^{1/2} d\mathbf{x} \leq C(\tau^*)h \left( \|f\|_{0, \Omega} + \|g\|_{0, \Omega} + \|\widehat{\phi}\|_{2, \Omega} + \|\widehat{\psi}\|_{2, \Omega} \right).$$

### 3.3 Résultats numériques

Nous testons la méthode de volumes finis sur différents types de maillages et nous définissons l'erreur discrète relative  $L^2$  sur les cellules-diamants par :

$$e^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |\mathbf{u} - \Pi \hat{\mathbf{u}}|_j^2}{\sum_j |D_j| |\Pi \hat{\mathbf{u}}|_j^2},$$

où  $(\Pi \hat{\mathbf{u}})_j$  est la valeur de la solution analytique au centre de gravité de  $D_j$  (noté  $B_j$ ) :

$$\forall j \in [1, J], (\Pi \hat{\mathbf{u}})_j = \hat{\mathbf{u}}(B_j).$$

Pour les trois premières familles de maillages (triangulaires non-structurés, non-conformes, triangulaires dégénérés), le domaine de calcul est le carré unité  $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ . Nous choisissons les données  $f, g$  et les conditions aux limites de telle sorte que la solution analytique est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) + \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ -\pi \exp(x) \sin(\pi y) - \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que les potentiels exacts sont donnés par

$$\hat{\phi}(x, y) = \exp(x) \cos(\pi y) \quad \text{et} \quad \hat{\psi}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

De plus, nous choisissons toujours le point  $G_i$  associé aux volumes de contrôle du maillage primal comme étant le centre de gravité de la cellule  $T_i$ .

#### 3.3.1 Maillages non-structurés

Tout d'abord, nous considérons une famille de six maillages non-structurés formés de petits triangles dont le nombre augmente. Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 3.2. Les erreurs numériques en norme discrète  $L^2$  sont présentées à l'échelle logarithmique sur la figure 3.3, sur laquelle nous avons aussi tracé une droite de référence de pente 1. Nous remarquons, comme nous l'avons prouvé précédemment, une convergence à l'ordre 1 du schéma présenté.

#### 3.3.2 Maillages non-conformes

Ensuite, nous considérons la famille de maillages non-conformes construite de la manière suivante. Soit  $n$  un entier. Nous découpons  $\Omega$  en  $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$  carrés identiques. Ensuite,

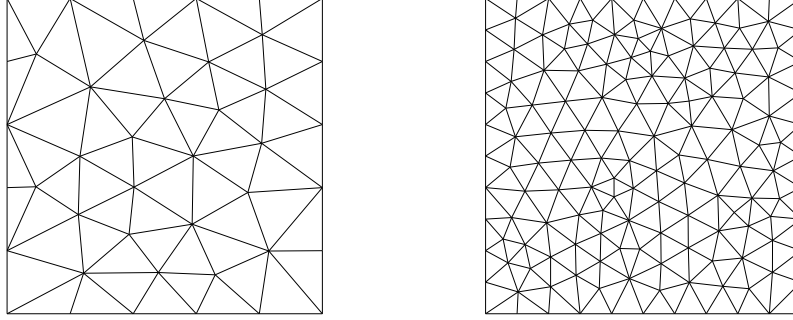
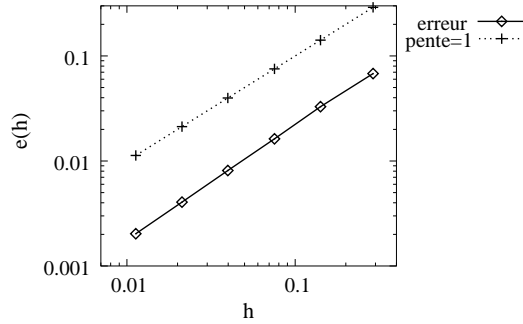


FIG. 3.2 – Maillages triangulaires non-structurés.


FIG. 3.3 – Erreur en norme  $L^2$ .

nous raffinons ce maillage localement en damier ; ce qui signifie qu'un carré sur deux est lui-même divisé en  $2^n \times 2^n$  sous-carrés identiques. Nous choisissons ici  $n \in [1; 4]$ . Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 3.4. Bien sûr, cette famille de maillages n'est pas d'une grande utilité pratique, mais elle constitue à notre avis un bon test pour l'application de la méthode DDFV sur des maillages non-conformes raffinés localement. Un zoom sur la forme des cellules-diamants pour ce type de maillages (avec  $n = 2$ ) est représenté sur la figure 3.6. En comparant cette figure avec la Fig. 3.1, nous en déduisons que

$$\max(\alpha_1, \beta_1, \mu_1 + \mu_2, \alpha_2, \beta_2, \nu_1 + \nu_2) = \beta_2 ,$$

qui est toujours plus petit que  $\frac{3\pi}{4}$  quelque soient les valeurs de  $n$ . De plus, on vérifie que l'angle maximum de toutes les cellules-diamants du bord est égal à  $\frac{\pi}{2}$ , de telle sorte que les maillages satisfont l'hypothèse 3.1 avec un angle  $\tau^* = \frac{3\pi}{4}$ . L'erreur discrète  $L^2$  est tracée à l'échelle logarithmique sur la figure 3.5, ainsi qu'une droite de référence de pente égale à 1. Nous observons, pour cette famille de maillages non-conformes, localement raffinés, une



convergence d'ordre 1 pour la norme discrète  $L^2$ .

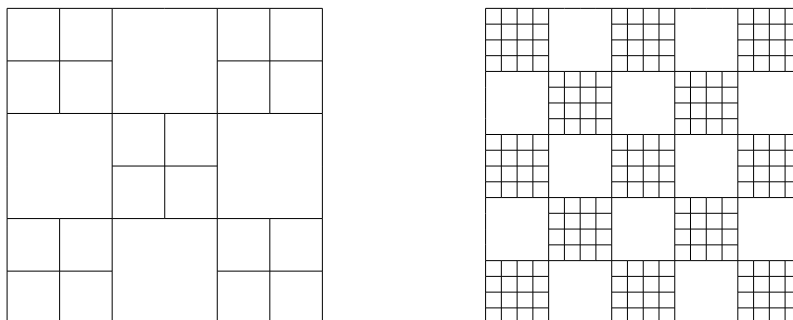


FIG. 3.4 – Maillages carrés non-conformes.

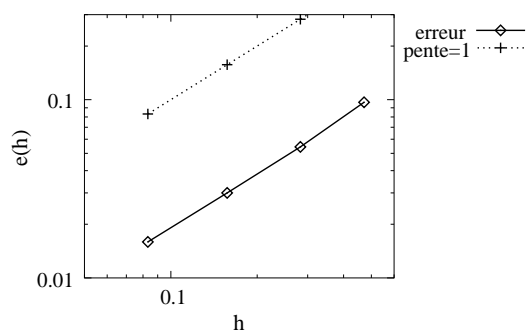


FIG. 3.5 – Erreur en norme  $L^2$ .

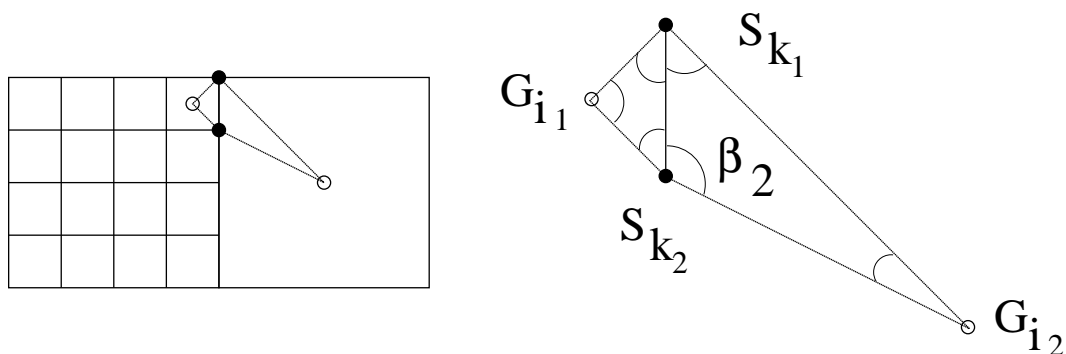


FIG. 3.6 – Zoom sur une cellule-diamant pour les maillages en damier avec  $n = 2$ .

### 3.3.3 Maillages dégénérés

Cette troisième famille est constituée de maillages de triangles aplatis construits de la manière suivante. Soit  $n$  un entier non nul. Nous divisons  $\Omega$  en  $4^n$  bandes horizontales de la même hauteur et nous divisons chacune d'elles en triangles identiques (exceptés pour les deux extrémités) de telle sorte qu'il y ait  $2^n$  bases de triangles dans la largeur de la bande et nous choisissons  $n \in [1; 6]$ . Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 3.7. Les erreurs numériques en norme  $L^2$  sont présentées à l'échelle logarithmique sur la figure 3.8, ainsi qu'une droite de référence de pente 1.5. Bien que cette famille de maillages ne vérifie pas l'hypothèse 3.1 (à cause des cellules-diamants frontières), nous observons une super-convergence de la méthode dans ce cas, qui est due au fait que, comme montré dans [40], la plupart des cellules-diamants (exceptées celles de la frontière) sont des parallélogrammes.

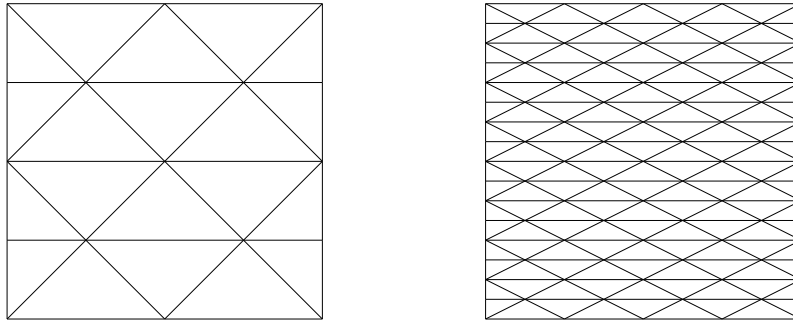


FIG. 3.7 – Maillages triangulaires dégénérés.

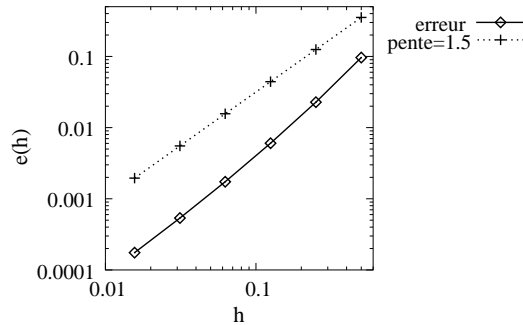


FIG. 3.8 – Erreur en norme  $L^2$ .

### 3.3.4 Maillages non-simplement connexes

Ici, le domaine de calcul est  $\Omega = [0, 1]^2 \setminus [1/3, 2/3]^2$ . Les données et conditions au bord sont choisies de telle sorte que la solution analytique est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) + 3\pi \sin(3\pi x) \cos(3\pi y) \\ -\pi \exp(x) \sin(\pi y) - 3\pi \cos(3\pi x) \sin(3\pi y) \end{pmatrix},$$

de telle sorte que

$$\hat{\phi}(x, y) = \exp(x) \cos(\pi y),$$

$$\hat{\psi}(x, y) = \sin(3\pi x) \sin(3\pi y).$$

Nous calculons la solution numérique sur une famille de cinq maillages triangulaires. Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 3.9. Les erreurs numériques en norme  $L^2$  sont présentées à l'échelle logarithmique sur la figure 3.10, ainsi qu'une droite de référence de pente 1. Nous observons une convergence d'ordre 1 du schéma sur ce type de maillages non-convexes lorsque la solution est suffisamment régulière, ce qui n'est pas le cas dans le prochain exemple.

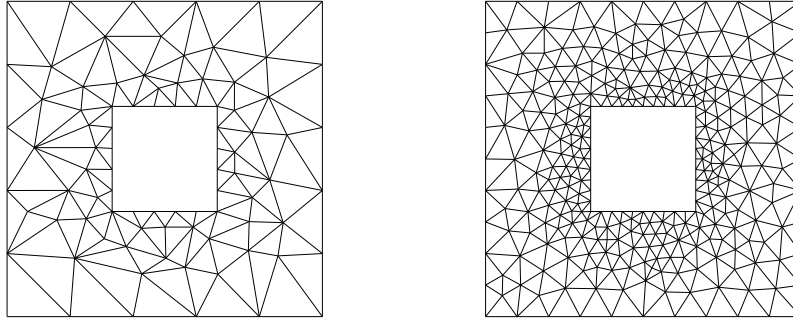
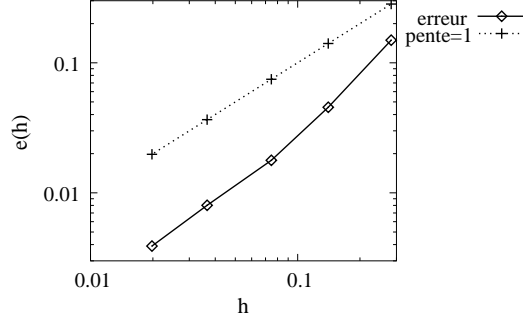


FIG. 3.9 – Maillages non-simplement connexes.

### 3.3.5 Maillages non-convexes et solutions moins régulières

Ici, le domaine de calcul est  $\Omega = ]-1/2; 1/2[^2 \setminus ]0; 1/2[^2$ . Les données et conditions au bord sont choisies de telle sorte que la solution analytique, exprimée en coordonnées polaires centrées en  $(0, 0)$ , est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}(r, \theta) = \nabla \left( r^{2/3} \cos \left( \frac{2}{3} \theta \right) \right),$$

FIG. 3.10 – Erreur en norme  $L^2$ .

ce qui signifie que  $\hat{\phi}(r, \theta) = r^{2/3} \cos(\frac{2}{3}\theta)$  et  $\hat{\psi} = 0$ . Notons que  $\hat{\phi}$  est encore dans  $H^1$  mais pas dans  $H^2$ , si bien que l'estimation d'erreur venant de la section 4.3 n'est pas valide. Plus précisément,  $\hat{\phi} \in (H^{1+s}(\Omega))^2$  avec  $s < 2/3$ . Nous utilisons une famille de quatre maillages non-structurés. Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 3.11, tandis que la courbe d'erreur en norme discrète  $L^2$  est tracée sur la figure 3.12, ainsi qu'une droite de référence de pente  $2/3$ . L'ordre de convergence du schéma semble être  $2/3$  dans ce cas, comme celui obtenu dans [21].

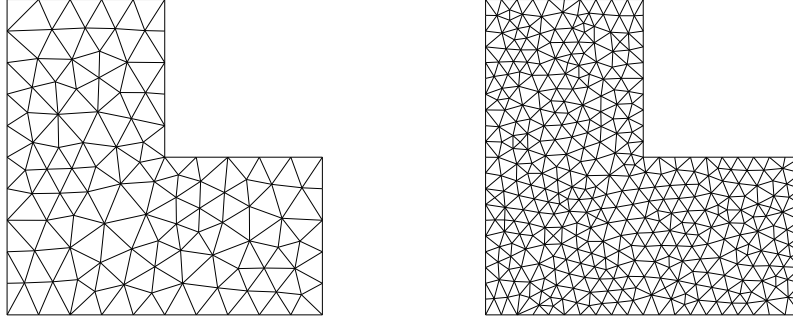


FIG. 3.11 – Maillages non-convexes.

### 3.4 Conclusion

Nous avons proposé de nouvelles discrétisations des opérateurs différentiels tels que la divergence, le gradient et le rotationnel sur des maillages bidimensionnels polygonaux arbitraires. Ces opérateurs discrets vérifient des propriétés discrètes analogues aux propriétés des

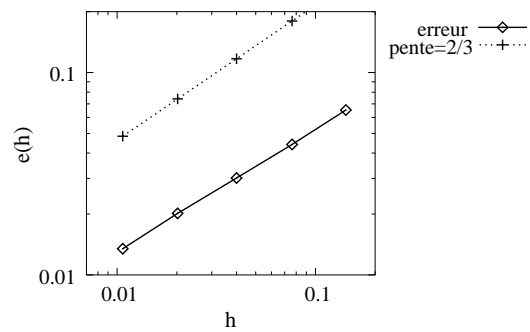


FIG. 3.12 – Erreur en norme  $L^2$ .

opérateurs continus. Nous avons appliqué ces idées pour approcher la solution de problèmes div-rot bidimensionnels et nous avons donné les estimations d'erreur pour le schéma obtenu. Enfin, nous avons démontré les possibilités de la méthode en fournissant une série de résultats numériques.

## Chapitre 4

# Singularités pour le Laplacien

Ce chapitre correspond à [34], actuellement en préparation.

### 4.1 Introduction

Considérons le problème suivant : étant donné  $f \in L^2(\Omega)$ , soit  $\phi \in H^1(\Omega)$  la solution variationnelle du problème de Laplace avec des conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= f \text{ dans } \Omega, \\ \phi &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.1)$$

ou avec des conditions homogènes de Neumann :

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= f \text{ dans } \Omega, \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \int_{\Omega} \phi \, d\mathbf{x} &= 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Il est bien connu que quand  $\Omega$  est un polygone convexe, alors les solutions des problèmes (4.1) et (4.2) sont régulières [30] et appartiennent à  $H^2(\Omega)$ . Cependant,  $\Omega$  est rarement convexe en pratique. Ainsi, de nombreuses études ont été menées sur des domaines polygonaux présentant des coins rentrants et nous savons [57, 107, 74, 33, 73] que les solutions de (4.1) et (4.2) ont des singularités qui conduisent à une perte de régularité près des parties non régulières de la frontière (en l'occurrence, au voisinage des coins rentrants), même si la donnée  $f$  est régulière sur  $\overline{\Omega}$ .

Plus précisément, quand  $\Omega$  a au moins un angle  $\omega_c \in ]\pi, 2\pi[$ , associé à un coin noté  $c$ , alors la

solution  $\phi$  des problèmes (4.1) et (4.2) peut se réécrire :

$$\phi = \tilde{\phi} + \sum_{\omega_c > \pi} \nu_c \phi_c, \quad (4.3)$$

où  $\tilde{\phi} \in H^2(\Omega)$  est la partie régulière,  $\phi_c \notin H^2(\Omega)$  est la partie singulière associée au coin  $c$  dont l'angle  $\omega_c$  appartient à  $]\pi, 2\pi[$  et  $\nu_c$  est un nombre réel. De plus, d'après [57, 72, 10, 73], la partie singulière  $\phi_c$  associée au coin  $c$  tel que  $\omega_c \in ]\pi, 2\pi[$  est définie en coordonnées polaires  $(r_c, \theta_c)$  par :

$$\phi_c(r_c, \theta_c) = \eta(r_c) r_c^{\frac{\pi}{\omega_c}} \sin\left(\frac{\pi\theta_c}{\omega_c}\right) \text{ pour le problème (4.1),} \quad (4.4)$$

et

$$\phi_c(r_c, \theta_c) = \eta(r_c) r_c^{\frac{\pi}{\omega_c}} \cos\left(\frac{\pi\theta_c}{\omega_c}\right) \text{ pour le problème (4.2),} \quad (4.5)$$

où  $\eta(r_c) = 1$  dans un voisinage du coin  $c$  et 0 sinon. Par conséquent, nous notons que, pour tout voisinage  $V_c$  du coin  $c$ , la solution  $\phi$  appartient à  $H^2(\Omega \setminus V_c)$  pour les deux problèmes. De plus, il est bien connu [57] que  $\phi$  appartient à  $H^{1+\frac{\pi}{\omega}-\epsilon}(\Omega)$  avec  $\epsilon > 0$  et  $\omega = \max_{\omega_c > \pi} \omega_c$ .

Dans ce qui suit, nous supposons que, sans perte de généralité,  $\Omega$  a un unique coin tel que  $\omega > \pi$  dont le sommet  $S$  est situé à l'origine  $(0,0)$ . Cette configuration est illustrée par la figure 4.1.

Maintenant, nous introduisons une famille d'espaces de Sobolev à poids  $H^{m,\alpha}(\Omega)$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$

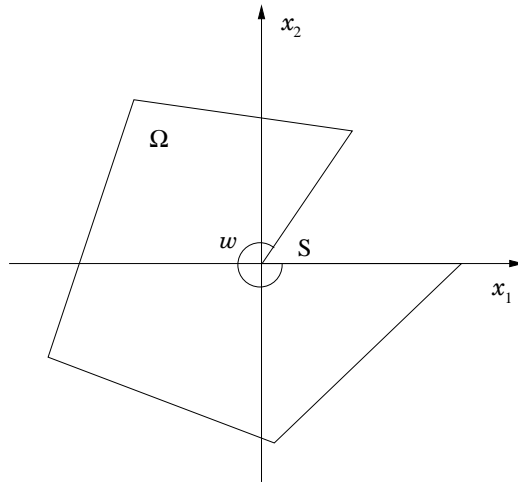


FIG. 4.1 – Le domaine  $\Omega$  avec un unique coin.

et  $\alpha \geq 0$  telle que

$$H^{m,\alpha}(\Omega) = \left\{ \phi \in H^{m-1}(\Omega) : |\phi|_{H^{m,\alpha}(\Omega)}^2 = \sum_{|\beta|=m} \|r^\alpha D^\beta \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty \right\},$$

où  $r := r(x) = d(x, S)$ , est la distance de  $x \in \Omega$  à l'origine  $S$ . De plus, pour  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha \in [0, 1[$ , nous définissons une norme sur  $H^{m,\alpha}(\Omega)$  par

$$\|\phi\|_{H^{m,\alpha}(\Omega)}^2 = \|\phi\|_{H^{m-1}(\Omega)}^2 + |\phi|_{H^{m,\alpha}(\Omega)}^2.$$

On vérifie facilement que  $H^2(\Omega) \subset H^{2,\alpha}(\Omega)$  et que les fonctions  $\phi_c$  définies dans (4.4) et (4.5) appartiennent à  $H^{2,\alpha}(\Omega)$  sous la condition  $\alpha \in ]1 - \frac{\pi}{\omega}, \frac{1}{2}[$ . Ainsi, la solution  $\phi \in H^1(\Omega)$  de chacun des problèmes (4.1) et (4.2) appartient à  $H^{2,\alpha}(\Omega)$  quand  $\Omega$  est non-convexe.

Cette perte de régularité conduit à une perte de l'ordre de convergence près du coin pour les techniques de discrétisation standard. En effet, [57, 107, 74, 9] ont montré qu'une suite quasi-uniforme de triangulations de  $\Omega$  ne conduira pas à un taux de convergence optimal pour l'approximation de Galerkin  $\phi_h$  de la solution. De plus, [39] observe numériquement une perte de régularité pour la méthode de volumes finis centrée sur les mailles [48, 60, 96], et pour les méthodes de volumes-éléments finis conformes et non-conformes [15, 23, 27, 26] (appelées aussi méthode "box") qui combinent les éléments finis et les volumes finis. Enfin, [28] a prouvé théoriquement la perte de régularité de la méthode de volumes-éléments finis.

En fait, il existe une grande littérature sur les singularités de coins (il existe aussi de nombreux travaux sur les singularités d'arêtes [6] en 3D ou sur d'autres espaces de Sobolev à poids [14] par exemple, mais dans ce chapitre nous nous focalisons sur les singularités de coins en 2D). Les travaux sur le problème de Laplace sont principalement basés sur les éléments finis avec des points de vue théorique et numérique, mais à notre connaissance, ce problème a été peu étudié pour les méthodes de volumes finis (voir [60, 39]), bien que ces méthodes soient intéressantes pour l'approximation de phénomènes physiques variés (pour des problèmes de mécanique des fluides ou de convection-diffusion par exemple).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la méthode DDFV [35]. L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet de traiter des maillages polygonaux arbitraires, tels que les maillages non-conformes ou les maillages non-structurés sans condition d'orthogonalité (voir [48], par exemple, pour ces conditions d'orthogonalité). Le prix à payer pour cela est l'ajout d'inconnues supplémentaires. Ainsi, pour le laplacien, les inconnues du schéma sont situées aux centres de gravité et aux sommets du maillage tandis que l'équation de Laplace est intégrée sur les



cellules du maillage (appelé maillage primal) et sur un second maillage, appelé maillage dual et dont les cellules sont centrées sur les sommets du maillage primal.

Nous avons aussi remarqué une perte de l'ordre de convergence pour le problème de Laplace discrétisé par la méthode DDFV en présence d'un coin rentrant (voir [38]). C'est la raison pour laquelle nous étudions dans ce chapitre (ou dans [34]) la capacité d'un raffinement local approprié à restaurer l'ordre de convergence optimal pour cette méthode de volumes finis, comme celui qui fut utilisé pour les méthodes d'éléments finis dans [97, 56]. De plus, les mêmes techniques de raffinement ont fonctionné (voir [39]) sur les méthodes de volumes finis centrées, et sur les méthodes de volumes-éléments finis. Par conséquent, nous allons appliquer dans ce chapitre le raffinement de maillage construit par [97] à la méthode DDFV. Ensuite, afin d'obtenir des estimations d'erreur correspondantes, nous combinons l'analyse d'erreur du schéma DDFV donnée par Domelevo-Omnès [40] pour des solutions régulières du problème de Laplace, avec l'analyse d'erreur de la méthode de Galerkin pour des solutions non-régulières décrite dans [56, 97]. La principale différence pour la méthode DDFV est que l'analyse d'erreur est donnée sur le maillage diamant, plutôt que sur le maillage primal comme cela se fait habituellement [56, 97, 39].

Ce chapitre s'organise comme suit : dans la section 4.2, nous rappelons le schéma DDFV pour le problème de Laplace obtenu dans [40] tandis que la section 4.3 est consacrée à l'analyse d'erreur pour des solutions non-régulières. Nous montrons comment certaines conditions de raffinement sur le maillage diamant conduisent à l'ordre de convergence optimal comme dans le cas de solutions régulières. Enfin, ces résultats théoriques sont illustrés dans la section 4.4 par quelques résultats numériques sur des maillages non-structurés sans raffinement local d'une part, puis sur des maillages structurés ou non avec un raffinement approprié près du coin rentrant d'autre part.

## 4.2 Problème de Laplace discret

Dans cette section, nous décrivons les schémas discrets obtenus pour le problème de Laplace avec la méthode DDFV. La construction de ces schémas est expliquée dans [40]. Le problème de Laplace avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes (4.1) est discrétisé

de la manière suivante

$$-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \bar{\phi})_i = f_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (4.6)$$

$$-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \bar{\phi})_k = f_k^T, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \quad (4.7)$$

$$\bar{\phi}_i^T = \bar{\phi}_k^P = 0, \quad \forall i \in [I + 1, I + J^\Gamma], \forall k \in [K - J^\Gamma + 1, K], \quad (4.8)$$

où  $f_i^T$  et  $f_k^P$  sont les moyennes de  $f$  sur  $T_i$  et  $P_k$  définies par

$$f_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad f_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le système linéaire (4.6)-(4.8) a une unique solution  $\bar{\phi} \in \bar{V}_D$ , ensemble défini par :

$$\begin{aligned} \bar{V}_D := \left\{ \bar{\phi} = \left( (\bar{\phi}_i^T), (\bar{\phi}_k^P) \right) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K : \right. \\ \left. \bar{\phi}_i^T = 0, \quad \forall i \in [I + 1, I + J^\Gamma] \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_k^P = 0, \quad \forall k \in [K - J^\Gamma + 1, K] \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'existence et l'unicité de la solution sont prouvées dans [40]. De plus, [40] montre que ce schéma est équivalent à une méthode d'éléments finis et donne les estimations d'erreur pour les solutions continues dans  $H^2(\Omega)$ . De la même manière, le problème (4.2) avec des conditions au bord de Neumann homogènes est discrétisé par

$$-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \bar{\phi})_i = f_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (4.10)$$

$$-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \bar{\phi})_k = f_k^T, \quad \forall k \in [1, K], \quad (4.11)$$

$$(\nabla_h^D \bar{\phi})_j \cdot \mathbf{n}_j = 0, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J] \quad (4.12)$$

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \bar{\phi}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \bar{\phi}_k^P = 0. \quad (4.13)$$

Le système linéaire (4.10)-(4.12) a une solution unique  $\bar{\phi} \in \bar{V}_N$ , ensemble défini par :

$$\bar{V}_N := \left\{ \bar{\phi} = \left( (\bar{\phi}_i^T), (\bar{\phi}_k^P) \right) \in \mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K : \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \bar{\phi}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \bar{\phi}_k^P = 0 \right\}, \quad (4.14)$$

à condition que  $\int_\Omega f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ . De plus, ces deux schémas avec des conditions aux limites non homogènes sont traitées dans [38]. Dans ce qui suit, nous aurons besoin de la projection des fonctions continues sur l'espace discret pour écrire les estimations d'erreur.

**Définition 4.1** Nous définissons, pour toute fonction continue  $\phi$ , l'élément  $\Pi\phi$  suivant par

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad (\Pi\phi)_i^T = \phi(G_i), \quad (4.15)$$

$$\forall k \in [1, K], \quad (\Pi\phi)_k^P = \phi(S_k). \quad (4.16)$$

Enfin, nous définissons l'opérateur ci-dessous, noté  $\delta$ .

**Définition 4.2** *Soit  $\phi$  une fonction. Sur chaque cellule-diamant  $D_j$ , on définit le vecteur constant  $(\delta\phi)_j$  par les produits scalaires suivants :*

$$(\delta\phi)_j \cdot \mathbf{n}_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j(\xi) \, d\xi, \quad (4.17)$$

et

$$(\delta\phi)_j \cdot \mathbf{n}'_j = \frac{1}{|A'_j|} \int_{A'_j} \nabla \phi \cdot \mathbf{n}'_j(\xi) \, d\xi. \quad (4.18)$$

### 4.3 Estimations d'erreur

Dans la section 4.3.1, nous rappelons tout d'abord un théorème (le théorème 4.1) prouvé dans [40] pour des solutions régulières sur des domaines convexes et ensuite, nous énonçons un nouveau théorème (le théorème 4.2) qui est un analogue du précédent sur des domaines non-convexes pour des solutions non-régulières. Les sous-sections 4.3.2 à 4.3.4 fournissent les outils nécessaires pour prouver le théorème 4.2 dans la section 4.3.5.

#### 4.3.1 Principaux résultats

Pour obtenir des estimations d'erreur, nous utiliserons l'hypothèse suivante concernant l'angle entre les diagonales des cellules-diamants (voir Fig. 4.2).

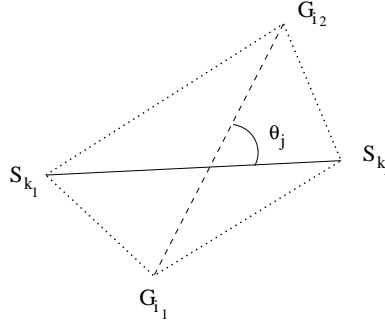


FIG. 4.2 – Angle entre les diagonales d'une cellule-diamant.

**Hypothèse 4.1** *Les angles entre les diagonales des cellules-diamants sont plus grands qu'un angle  $\theta^*$  strictement positif et indépendant du maillage :*

$$\exists \theta^*, \quad 0 < \theta^* < \frac{\pi}{2} \quad \text{tel que} \quad \theta_j \geq \theta^*, \quad \forall j \in [1, J]. \quad (4.19)$$

Nous estimons la semi-norme  $H^1$  de l'erreur entre  $\bar{\phi}$  l'élément de  $\bar{V}_D$  (resp.  $\bar{V}_N$ ) solution du système (4.6)-(4.8) (resp. (4.10)-(4.13)) et la projection de la solution exacte  $\Pi\phi$  (voir Déf. (4.9) et (4.14)). Lorsque le domaine est convexe, noté  $\Omega_{conv}$ , [40] a montré le théorème suivant pour le laplacien avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

**Théorème 4.1** *Si toutes les cellules-diamants sont convexes,  $f \in L^2(\Omega_{conv})$  et sous l'hypothèse 4.1, il existe une constante  $C(\theta^*)$  indépendante du pas du maillage  $h_{conv}$  telle que*

$$|\bar{\phi} - \Pi\phi|_{1,D} \leq C(\theta^*) h_{conv} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Une analyse similaire à [40] permet d'obtenir une estimée analogue pour le problème de Laplace discret avec des conditions aux limites de Neumann. Cependant, lorsque le domaine  $\Omega$  est non-convexe, nous avons établi numériquement dans [38] (voir aussi la Fig. 4.4 de la section 4.4) que l'ordre de convergence n'est pas optimal.

Le but de ce qui suit est d'énoncer un théorème similaire, pour des solutions non régulières sur des domaines non convexes en utilisant des raffinements locaux appropriés qui permettent de restaurer l'ordre de convergence optimal, et ensuite de prouver ce théorème. Nous allons travailler sur les demi-diamants  $D_{j,\gamma}$  (resp.  $D'_{j,\gamma}$ ) de la figure 2.5 qui sont supposés ouverts et qui représentent une triangulation  $\mathcal{T}_h$  (resp.  $\mathcal{T}'_h$ ) de  $\Omega$ .

Comme dans l'hypothèse 4.1, nous supposons que les  $D_{j,\gamma}$  (resp.  $D'_{j,\gamma}$ ) ne dégèrent pas quand  $h$  tend vers 0.

**Hypothèse 4.2** *Les familles  $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$  et  $(\mathcal{T}'_h)_{h>0}$  de triangulations de  $\Omega$  sont régulières au sens de Ciarlet [30], ce qui signifie que*

$$\exists \sigma > 0 \text{ tel que } \frac{h_{j,\gamma}}{\rho_{j,\gamma}} \leq \sigma, \forall D_{j,\gamma} \in \mathcal{T}_h, \forall h > 0, \quad (4.20)$$

$$\exists \sigma' > 0 \text{ tel que } \frac{h'_{j,\gamma}}{\rho'_{j,\gamma}} \leq \sigma', \forall D'_{j,\gamma} \in \mathcal{T}'_h, \forall h > 0, \quad (4.21)$$

où  $h_{j,\gamma}$  (resp.  $h'_{j,\gamma}$ ) est le diamètre de  $D_{j,\gamma}$  (resp.  $D'_{j,\gamma}$ ), tandis que  $\rho_{j,\gamma}$  (resp.  $\rho'_{j,\gamma}$ ) est le diamètre du cercle inscrit de  $D_{j,\gamma}$  (resp.  $D'_{j,\gamma}$ ). Nous notons de plus :  $h = \max_{j \in [1,J], \gamma \in \{1,2\}} h_{j,\gamma}$ .

Remarquons que d'après [9] ou [56, Lemme 8.4.1.2], l'espace  $H^{2,\alpha}(\Omega)$  s'injecte continûment dans  $C^0(\bar{\Omega})$  si  $\alpha < 1$ , ce qui implique que  $\phi \in C^0(\bar{\Omega})$  et donc  $\Pi\phi$  a un sens. Maintenant, nous avons les notations nécessaires pour énoncer le théorème 4.2 qui est un analogue du théorème 4.1 sur les domaines non-convexes :

**Théorème 4.2** *Soit  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ . Supposons que les cellules-diamants sont convexes et que l'hypothèse 4.1 est satisfaite, alors si les triangulations  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}'_h$  satisfont l'hypothèse 4.2 et les hypothèses de raffinement suivantes :*

$$h_{j,\gamma} \leq \zeta h^{1/1-\alpha}, \quad \text{si } (0,0) \in \overline{D}_{j,\gamma}, \quad (4.22)$$

$$h_{j,\gamma} \leq \zeta h \left[ \inf_{x \in D_{j,\gamma}} r(x) \right]^\alpha, \quad \text{si } (0,0) \notin \overline{D}_{j,\gamma}, \quad (4.23)$$

$$h'_{j,\gamma} \leq \zeta h^{1/1-\alpha}, \quad \text{si } (0,0) \in \overline{D}'_{j,\gamma}, \quad (4.24)$$

$$h'_{j,\gamma} \leq \zeta h \left[ \inf_{x \in D'_{j,\gamma}} r(x) \right]^\alpha, \quad \text{si } (0,0) \notin \overline{D}'_{j,\gamma}, \quad (4.25)$$

avec  $\zeta > 0$ , alors si  $\phi \in H^{2,\alpha}(\Omega)$ , il existe  $C(\theta^*) > 0$  tel que :

$$|\overline{\phi} - \Pi\phi|_{1,D} \leq C(\theta^*) h |\phi|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}. \quad (4.26)$$

Les hypothèses (4.22) et (4.23) sont les mêmes que celles utilisées par [97, 56, 39] sur les cellules primales. Dans ce qui suit, nous donnons dans la section 4.3.2 une première majoration du membre de gauche de (4.26) sur les triangulations  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}'_h$ . Ensuite, nous introduisons, dans la section 4.3.3, un triangle de référence sur lequel nous donnons quelques résultats relatifs à chacun des termes de cette borne, puis par un changement de variables, nous repasserons aux triangles  $D_{j,\gamma}$  ou  $D'_{j,\gamma}$  dans la section 4.3.4. Et finalement, dans la section 4.3.5, nous donnons une preuve du théorème 4.2.

### 4.3.2 Majoration préliminaire

Soit  $\omega_{j,1}$  (resp.  $\omega_{j,2}$ ) le polynôme de Lagrange de degré un, interpolant  $\phi$  sur le triangle  $D_{j,1}$  (resp.  $D_{j,2}$ ) i.e. dont la valeur en chacun des trois sommets de  $D_{j,1}$  (resp.  $D_{j,2}$ ) est égale à la valeur de la fonction  $\phi$  en ce point. Le lemme suivant se déduit de [40, Lemme 5.9] et de quelques idées contenues dans la preuve de [40, Lemme 5.10]. Ces idées s'appliquent ici puisqu'elles sont indépendantes de la convexité ou non de  $\Omega$ . Définissons sur chaque cellule-diamant  $D_j$  la quantité

$$\mathbf{e}_j(\mathbf{x}) := (\delta\phi)_j - \nabla\phi(\mathbf{x}). \quad (4.27)$$

Alors nous avons une première majoration du membre de gauche de (4.26) :

**Lemme 4.1** *Sous l'hypothèse (4.19) et en supposant que les cellules-diamants sont convexes, nous avons l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} |\bar{\phi} - \Pi\phi|_{1,D} \leq & \frac{\sqrt{2}}{\sin \theta^*} \left( \sum_{j \in [1,J]} \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \int_{D_{j,\gamma}} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_j)^2 d\mathbf{x} + \int_{D'_{j,\gamma}} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}'_j)^2 d\mathbf{x} \right] \right)^{1/2} \\ & + \left( \sum_{j \in [1,J]} \sum_{\gamma=1}^2 \int_{D_{j,\gamma}} |\nabla \phi(\mathbf{x}) - \nabla \omega_{j,\gamma}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

**Preuve** Nous partons de [40, Lemme 5.9], qui nous donne l'inégalité suivante :

$$|\bar{\phi} - \Pi\phi|_{1,D} \leq \left( \sum_{j \in [1,J]} \int_{D_j} |\mathbf{e}_j|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} + \left( \sum_{j \in [1,J]} \sum_{\gamma=1}^2 \int_{D_{j,\gamma}} |\nabla \phi(\mathbf{x}) - \nabla \omega_{j,\gamma}|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

En utilisant les produits scalaires respectifs de  $\mathbf{e}_j$  avec  $\mathbf{n}_j$  et  $\mathbf{n}'_j$ , le terme  $|\mathbf{e}_j|^2(\mathbf{x})$  peut être borné (voir la preuve de [40, Lemme 5.10]) par

$$|\mathbf{e}_j|^2 \leq \frac{2}{1 - (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}'_j)^2} [(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_j)^2 + (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}'_j)^2].$$

On termine la preuve en utilisant l'égalité  $1 - (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}'_j)^2 = (\sin \theta_j)^2 \geq (\sin \theta^*)^2$  sous l'hypothèse (4.19).  $\square$

### 4.3.3 Résultats sur le triangle de référence $\hat{T}$

Maintenant, on note  $\hat{T}$  le triangle de référence dont les sommets sont  $\hat{S}_1(0,0)$ ,  $\hat{S}_2(1,0)$  et  $\hat{S}_3(0,1)$ . De plus, on note  $\hat{A}$  une arête de  $\hat{T}$ .

Supposons que  $\hat{v} \in H^{1,\alpha}(\hat{T})$ , alors puisque  $H^{1,\alpha}(\hat{T})$  s'injecte continûment dans  $L^2(\partial\hat{T})$  (voir [39, preuve du lemme 3.4]) qui est inclus dans  $L^1(\partial\hat{T})$ , il en découle que la trace de  $\hat{v}$  à  $\hat{A}$  est bien dans  $L^1(\hat{A})$ . Par conséquent, nous pouvons énoncer le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *Si  $\hat{v} \in H^{1,\alpha}(\hat{T})$ , avec  $\alpha \in [0, 1[$ , satisfait  $\int_{\hat{A}} \hat{v}(\xi) d\xi = 0$ , alors il existe  $\hat{C} > 0$  tel que*

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{T})} \leq \hat{C} |\hat{v}|_{H^{1,\alpha}(\hat{T})}. \quad (4.29)$$

**Preuve** Rappelons que  $L^2(\hat{T})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\hat{T})}$ , tandis que l'espace  $H^{1,\alpha}(\hat{T})$  est muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^{1,\alpha}(\hat{T})}$ . Si  $\hat{v} \in H^{1,\alpha}(\hat{T})$ , alors par définition de la norme  $H^{1,\alpha}(\hat{T})$ , nous avons :

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{T})} \leq \|\hat{v}\|_{H^{1,\alpha}(\hat{T})}.$$

Montrons que, sous l'hypothèse  $\int_{\hat{A}} \hat{v}(\xi) d\xi = 0$ , la norme de  $H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$  est équivalente à la semi-norme  $H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$ . Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite  $(\hat{v}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec  $\int_{\hat{A}} \hat{v}_n(\xi) d\xi = 0$  telle que

$$\|\hat{v}_n\|_{H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})} = 1, \quad (4.30)$$

et

$$|\hat{v}_n|_{H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})} = \frac{1}{n}. \quad (4.31)$$

L'égalité (4.30) implique que la suite  $(\hat{v}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$ , qui s'injecte continûment dans  $L^2(\hat{\mathcal{T}})$  et l'injection est compacte. Alors on peut extraire une sous-suite de  $(\hat{v}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $\hat{v}_{n_k} \rightarrow \hat{v}$  dans  $L^2(\hat{\mathcal{T}})$ . Ainsi  $(\hat{v}_{n_k})_k$  est de Cauchy dans  $L^2(\hat{\mathcal{T}})$ , et même dans  $H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$ , grâce à (4.31), qui est complet. Par conséquent,  $\hat{v}_{n_k} \rightarrow \hat{v}$  dans  $H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$  et de plus, on déduit de (4.31) que  $|\hat{v}|_{H^{1,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})} = 0$ , c'est à dire que  $\hat{v} = c$  où  $c$  est une constante. Enfin, l'application  $\hat{\mathbf{u}} \mapsto \int_{\hat{A}} \hat{\mathbf{u}}(\xi) d\xi$  est continue donc  $\int_{\hat{A}} \hat{v}(\xi) d\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\hat{A}} \hat{v}_n(\xi) d\xi = 0$  implique que  $c = 0$ , ce qui est en contradiction avec (4.30).  $\square$

Ensuite, nous avons besoin du lemme suivant qui est donné dans [56, Lemme 8.4.1.3] avec sa preuve.

**Lemme 4.3** *Soit  $P_1(\hat{\mathcal{T}})$  l'espace des polynômes de degré un restreints à  $\hat{\mathcal{T}}$  et  $\alpha \in [0, 1[$ , alors il existe  $\hat{C} > 0$  tel que*

$$\inf_{p \in P_1(\hat{\mathcal{T}})} \|\phi - p\|_{H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})} \leq \hat{C} |\phi|_{H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})}, \forall \phi \in H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}}).$$

D'après [9] ou [56, Lemme 8.4.1.2], l'espace  $H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$  s'injecte continûment dans  $C^0(\widehat{\mathcal{T}})$  si  $\alpha < 1$ , ce qui implique que  $\hat{\phi} \in C^0(\widehat{\mathcal{T}})$  et  $\hat{\phi}(\hat{S}_l)$ , avec  $l = 1, 2, 3$ , a un sens. Ainsi, on peut interpoler  $\hat{\phi}$  par un polynôme de degré un : si  $\alpha \in [0, 1[$ , alors pour tout  $\hat{\phi} \in H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})$ , il existe un unique  $\hat{\omega} \in P_1(\hat{\mathcal{T}})$  tel que

$$\hat{\omega}(\hat{S}_l) = \hat{\phi}(\hat{S}_l), \quad l = 1, 2, 3. \quad (4.32)$$

Le lemme suivant est fourni par [56] et nous rappelons les principales idées de la preuve. Il donne une majoration de l'analogue sur le triangle de référence du terme que nous voulons majorer  $\left[ \int_{\mathcal{T}_{j,\gamma}} |\nabla \phi(\mathbf{x}) - \nabla \omega_{j,\gamma}|^2 d\mathbf{x} \right]^{1/2}$  dans l'inégalité (4.28).

**Lemme 4.4** *Si  $\alpha \in [0, 1[$  et  $\hat{\omega} = P\hat{\phi} \in P_1(\hat{\mathcal{T}})$  défini par (4.32), alors il existe  $\hat{C} > 0$  tel que*

$$\|\hat{\phi} - \hat{\omega}\|_{H^1(\hat{\mathcal{T}})} \leq \hat{C} |\hat{\phi}|_{H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}})}, \forall \hat{\phi} \in H^{2,\alpha}(\hat{\mathcal{T}}). \quad (4.33)$$

**Preuve** Pour tout  $p \in P_1(\widehat{T})$ , nous avons  $\widehat{\phi} - P\widehat{\phi} = (1 - P)(\widehat{\phi} - p)$ . Alors  $1 - P$ , où  $1$  est l'opérateur identité, est continu de  $H^{2,\alpha}(\widehat{T})$  dans  $H^1(\widehat{T})$ . Par conséquent, il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|\widehat{\phi} - P\widehat{\phi}\|_{H^1(\widehat{T})} \leq C \|\widehat{\phi} - p\|_{H^{2,\alpha}(\widehat{T})}$ . En prenant l'infimum en  $p$ , (4.33) découle du lemme 4.3.  $\square$

#### 4.3.4 Résultats similaires sur un triangle $\mathcal{T}_{j,\gamma}$ par un changement de variables

Nous avons introduit un triangle de référence sur lequel nous avons montré des résultats que nous allons appliquer aux termes du membre de droite de l'inégalité (4.28). Par un changement de variable, nous allons travailler de nouveau sur les triangles  $D_{j,\gamma}$  et  $D'_{j,\gamma}$ . Nous définissons ci-dessous l'application bijective de  $\widehat{T}$  dans  $D_{j,\gamma}$ .

**Définition 4.3** Soit  $\mathcal{T}_h$  la triangulation de  $\Omega$ , composée de demi-diamants  $D_{j,\gamma}$  et définie dans la section 4.3.1. On considère  $D_{j,\gamma} \in \mathcal{T}_h$  dont les sommets  $S_l^{j,\gamma}$  avec  $l = 1, 2, 3$  et  $\widehat{T}$  le triangle de référence. Alors, il existe une application bijective

$$\Phi_{j,\gamma} : \begin{array}{ccc} \widehat{T} & \longrightarrow & D_{j,\gamma} \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)^t & \longmapsto & (x_1, x_2)^t = B_{j,\gamma} (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)^t + b_{j,\gamma} \end{array}, \quad (4.34)$$

construite telle que  $\Phi_{j,\gamma}(\widehat{S}_l) = S_l^{j,\gamma}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , où

$B_{j,\gamma} = (S_2^{j,\gamma} - S_1^{j,\gamma}, S_3^{j,\gamma} - S_1^{j,\gamma})$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  et  $b_{j,\gamma} = S_1^{j,\gamma}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

De la même manière, on définit une application bijective de  $\widehat{T}$  dans  $D'_{j,\gamma}$ .

**Définition 4.4** Soit  $\mathcal{T}'_h$  la triangulation de  $\Omega$ , composée de demi-diamants  $D'_{j,\gamma}$  et définie dans la section 4.3.1. On considère  $D'_{j,\gamma} \in \mathcal{T}'_h$  dont les sommets  $(S')_l^{j,\gamma}$  avec  $l = 1, 2, 3$  et  $\widehat{T}$  le triangle de référence. Alors, il existe une application bijective

$$\Phi'_{j,\gamma} : \begin{array}{ccc} \widehat{T} & \longrightarrow & D'_{j,\gamma} \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)^t & \longmapsto & (x_1, x_2)^t = B'_{j,\gamma} (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)^t + b'_{j,\gamma} \end{array}, \quad (4.35)$$

construite telle que  $\Phi'_{j,\gamma}(\widehat{S}_l) = (S')_l^{j,\gamma}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , où

$B'_{j,\gamma} = ((S')_2^{j,\gamma} - (S')_1^{j,\gamma}, (S')_3^{j,\gamma} - (S')_1^{j,\gamma})$  est une matrice de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  et  $b'_{j,\gamma} = (S')_1^{j,\gamma}$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .



**Proposition 4.1** *Soit  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $\phi \in H^{2,\alpha}(\Omega)$ , nous avons*

$$\|\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})} \leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^\alpha \|B_{j,\gamma}\|_2 \|\phi\|_{H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \in \overline{D}_{j,\gamma} \quad (4.36)$$

$$\|\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})} \leq C \|B_{j,\gamma}\|_2 \|\phi\|_{H^2(D_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \notin \overline{D}_{j,\gamma} \quad (4.37)$$

$$\|\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{n}'_j\|_{L^2(D'_{j,\gamma})} \leq C \|B'_{j,\gamma}{}^{-1}\|_2^\alpha \|B'_{j,\gamma}\|_2 \|\phi\|_{H^{2,\alpha}(D'_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \in \overline{D}'_{j,\gamma} \quad (4.38)$$

$$\|\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{n}'_j\|_{L^2(D'_{j,\gamma})} \leq C \|B'_{j,\gamma}\|_2 \|\phi\|_{H^2(D'_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \notin \overline{D}'_{j,\gamma} \quad (4.39)$$

$$\|\nabla \phi - \nabla \omega_{j,\gamma}\|_{L^2(D_{j,\gamma})} \leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{1+\alpha} \|B_{j,\gamma}\|_2^2 \|\phi\|_{H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \in \overline{D}_{j,\gamma} \quad (4.40)$$

$$\|\nabla \phi - \nabla \omega_{j,\gamma}\|_{L^2(D_{j,\gamma})} \leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2 \|B_{j,\gamma}\|_2^2 \|\phi\|_{H^2(D_{j,\gamma})}, \quad \text{si } (0,0) \notin \overline{D}_{j,\gamma} \quad (4.41)$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne associée à une matrice (parfois un vecteur) et  $\omega_{j,\gamma} \in P_1(D_{j,\gamma})$  est tel que  $\omega_{j,\gamma}(S_l^{j,\gamma}) = \phi(S_l^{j,\gamma})$ ,  $l = 1, 2, 3$ .

**Preuve** En utilisant l'application bijective  $\Phi_{j,\gamma}$  définie en (4.34), on vérifie que

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) = (B_{j,\gamma}^t)^{-1} \nabla \widehat{\phi}(\widehat{\mathbf{x}}) \quad (4.42)$$

avec  $\widehat{\mathbf{x}} = \Phi_{j,\gamma}^{-1}(\mathbf{x})$ . Puisque  $\phi \in H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})$ , alors  $(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j$  appartient nécessairement à  $H^{1,\alpha}(D_{j,\gamma})$ . D'autre part, l'intégrale de  $(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j$  sur  $A_j$  est nulle. Nous allons donc poser  $v = (\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j$  et faire le changement de variable suivant  $v(\mathbf{x}) = \widehat{v}(\widehat{\mathbf{x}})$ . Ainsi,

$$\|v\|_{L^2(D_{j,\gamma})}^2 = 2 |D_{j,\gamma}| \|\widehat{v}\|_{L^2(\widehat{T})}^2.$$

Ensuite, on applique le lemme 4.2 à  $\widehat{v}$  qui est de moyenne nulle sur  $\widehat{A} = \Phi_{j,\gamma}^{-1}(A_j)$  puisque le triangle  $D_{j,\gamma}$  est non dégénéré. Ainsi, il existe  $C > 0$  tel que

$$\|(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})}^2 \leq C |D_{j,\gamma}| \int_{\widehat{T}} \widehat{r}^{2\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}) |\nabla \widehat{v}|^2 d\widehat{\mathbf{x}}. \quad (4.43)$$

Si  $(0,0) \in \overline{D}_{j,\gamma}$ , nous supposons, sans perte de généralité, que  $S_1^{j,\gamma} = (0,0)$ , alors nous pouvons écrire

$$\widehat{r}(\widehat{\mathbf{x}}) = \|\widehat{\mathbf{x}}\|_2 = \|B_{j,\gamma}^{-1}(\mathbf{x})\|_2 \leq \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2 r(\mathbf{x}), \quad (4.44)$$

où  $\widehat{r}(\widehat{\mathbf{x}})$  est la distance entre  $\widehat{\mathbf{x}} \in \widehat{T}$  et  $\widehat{S}_1(0,0)$ . En faisant de nouveau un changement de variable dans (4.43), puis en utilisant (4.44) et (4.42), on obtient

$$\begin{aligned} \|(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})}^2 &\leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \int_{D_{j,\gamma}} r^{2\alpha}(\mathbf{x}) |(B_{j,\gamma}^t)^{-1} \nabla v|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B_{j,\gamma}^t\|_2^2 \int_{D_{j,\gamma}} r^{2\alpha}(\mathbf{x}) |\nabla v|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

qui se réécrit encore avec  $\|B_{j,\gamma}\|_2 = \|B_{j,\gamma}^t\|_2$ ,

$$\|(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla\phi \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})}^2 \leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B_{j,\gamma}\|_2^2 |v|_{H^{1,\alpha}(D_{j,\gamma})}^2.$$

En remplaçant  $v$  par son expression et puisque  $(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j$  est constant sur  $D_{j,\gamma}$  et que  $\mathbf{n}_j$  est un vecteur unitaire, l'inégalité précédente implique que

$$\|(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}_j - \nabla\phi \cdot \mathbf{n}_j\|_{L^2(D_{j,\gamma})}^2 \leq C \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})}^2, \quad (4.45)$$

et on en déduit (4.36). Bien entendu, en faisant le même raisonnement pour  $(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}'_j - \nabla\phi \cdot \mathbf{n}'_j$  sur  $D'_{j,\gamma}$ , on en déduit l'existence de  $C > 0$  tel que

$$\|(\delta\phi) \cdot \mathbf{n}'_j - \nabla\phi \cdot \mathbf{n}'_j\|_{L^2(D'_{j,\gamma})}^2 \leq C \|B'_{j,\gamma}{}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B'_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(D'_{j,\gamma})}^2, \quad (4.46)$$

d'où (4.38) D'autre part, par un changement de variables, puis en utilisant le lemme 4.4 et  $\|B_{j,\gamma}\|_2 = \|B_{j,\gamma}^t\|_2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{D_{j,\gamma}} |\nabla\phi - \nabla\omega_{j,\gamma}|^2 d\mathbf{x} &= 2 |D_{j,\gamma}| \int_{\widehat{T}} \left| (B_{j,\gamma}^t)^{-1} (\nabla\widehat{\phi} - \nabla\widehat{\omega}) \right|^2 d\widehat{\mathbf{x}} \\ &\leq 2 |D_{j,\gamma}| \|(B_{j,\gamma}^{-1})^t\|_2^2 \|\widehat{\phi} - \widehat{\omega}\|_{H^1(\widehat{T})}^2 \\ &\leq C |D_{j,\gamma}| \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^2 \left| \widehat{\phi} \right|_{H^{2,\alpha}(\widehat{T})}^2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Maintenant, on utilise la matrice Hessienne et la norme de Schur qui vérifient  $\sum_{|\beta|=2} \left| D^\beta \widehat{\phi} \right|^2 = \|\widehat{H}(\widehat{\phi})\|_S^2$ , alors nous avons

$$\left| \widehat{\phi} \right|_{H^{2,\alpha}(\widehat{T})}^2 = \int_{\widehat{T}} \widehat{r}^{2\alpha}(\widehat{\mathbf{x}}) \|\widehat{H}(\widehat{\phi})\|_S^2 d\widehat{\mathbf{x}}.$$

De plus,  $\|B_{j,\gamma}\|_2 = \|B_{j,\gamma}^t\|_2$  et en dimension finie, les normes sont équivalentes, ce qui implique l'existence de deux nombres réels  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  tels que

$$\|\widehat{H}(\widehat{\phi})\|_S = \|B_{j,\gamma}^t H(\phi) B_{j,\gamma}\|_S \leq C_1 \|B_{j,\gamma}\|_2^2 \|H(\phi)\|_2 \leq C_2 \|B_{j,\gamma}\|_2^2 \|H(\phi)\|_S,$$

et par un changement de variables, nous obtenons de la ligne précédente et de (4.44) que

$$\int_{\widehat{T}} \widehat{r}^{2\alpha} \|\widehat{H}(\widehat{\phi})\|_S^2 d\widehat{\mathbf{x}} \leq \frac{C_2^2}{2 |D_{j,\gamma}|} \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B_{j,\gamma}\|_2^4 \int_{D_{j,\gamma}} r^{2\alpha}(\mathbf{x}) \|H(\phi)\|_S^2 d\mathbf{x},$$

qui peut se réécrire

$$\left| \widehat{\phi} \right|_{H^{2,\alpha}(\widehat{T})}^2 \leq \frac{C_2^2}{2 |D_{j,\gamma}|} \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha} \|B_{j,\gamma}\|_2^4 |\phi|_{H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})}^2, \quad (4.48)$$

ce qui, avec (4.47), implique (4.40). Maintenant, si  $(0, 0) \notin \overline{D}_{j,\gamma}$ , alors  $H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma}) = H^2(D_{j,\gamma})$  dans (4.48) et on peut choisir  $\alpha = 0$ . Nous obtenons alors l'estimée suivante

$$\left| \widehat{\phi} \right|_{H^2(\widehat{T})}^2 \leq \frac{C_2^2}{2 |D_{j,\gamma}|} \|B_{j,\gamma}\|_2^4 |\phi|_{H^2(D_{j,\gamma})}^2 \quad (4.49)$$

On obtient (4.41) en utilisant (4.47) ainsi que (4.49). De même, si  $(0, 0) \notin \overline{D}_{j,\gamma}$  (resp.  $(0, 0) \notin \overline{D}'_{j,\gamma}$ ), on peut choisir  $\alpha = 0$  dans (4.45) (resp. (4.46)), ce qui implique (4.37) (resp. (4.39)).  $\square$

#### 4.3.5 Preuve du théorème 4.2

Posons  $\alpha_{j,\alpha} = \alpha$  si  $(0, 0) \in \overline{D}_{j,\alpha}$  et  $\alpha_{j,\alpha} = 0$  sinon. De même, nous posons  $\alpha'_{j,\alpha} = \alpha$  si  $(0, 0) \in \overline{D}'_{j,\alpha}$  et  $\alpha'_{j,\alpha} = 0$  sinon. En appliquant la proposition 4.1, il existe  $C > 0$  tel que

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \int_{D_{j,\gamma}} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}_j)^2 d\mathbf{x} \right] \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha_{j,\gamma}} \|B_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2, \quad (4.50)$$

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \left[ \int_{D'_{j,\gamma}} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}'_j)^2 d\mathbf{x} \right] \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B'_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha'_{j,\gamma}} \|B'_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha'_{j,\gamma}}(D'_{j,\gamma})}^2, \quad (4.51)$$

pour tout  $\gamma \in \{1, 2\}$ . D'autre part, il existe aussi  $C > 0$  tel que

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \int_{D_{j,\gamma}} |\nabla \phi(\mathbf{x}) - \nabla \omega_{j,\gamma}|^2 d\mathbf{x} \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2+2\alpha_{j,\gamma}} \|B_{j,\gamma}\|_2^4 |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2. \quad (4.52)$$

Grâce à l'hypothèse de régularité 4.2, la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  des matrices  $B_{j,\gamma}$  et  $B'_{j,\gamma}$ , ainsi que leurs inverses peut être bornée par (voir théorème 3.1.3 dans [30])

$$\begin{aligned} \|B_{j,\gamma}\|_2 &\leq \sqrt{2} h_{j,\gamma} \quad , \quad \|B'_{j,\gamma}\|_2 \leq \sqrt{2} h'_{j,\gamma} , \\ \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2 &\leq \frac{\sqrt{2}}{\rho_{j,\gamma}} \leq \frac{\sqrt{2} \sigma}{h_{j,\gamma}} \quad , \quad \|B'_{j,\gamma}^{-1}\|_2 \leq \frac{\sqrt{2}}{\rho'_{j,\gamma}} \leq \frac{\sqrt{2} \sigma'}{h'_{j,\gamma}} , \end{aligned}$$

ce qui implique, en utilisant l'Hyp. 4.2, que (4.50), (4.51) et (4.52) peuvent se réécrire

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2\alpha_{j,\gamma}} \|B_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2 \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 h_{j,\gamma}^{2-2\alpha_{j,\gamma}} |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2, \quad (4.53)$$

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B'_{j,\gamma}{}^{-1}\|_2^{2\alpha'_{j,\gamma}} \|B'_{j,\gamma}\|_2^2 |\phi|_{H^{2,\alpha'_{j,\gamma}}(D'_{j,\gamma})}^2 \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 h'_{j,\gamma}{}^{2-2\alpha'_{j,\gamma}} |\phi|_{H^{2,\alpha'_{j,\gamma}}(D'_{j,\gamma})}^2, \quad (4.54)$$

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 \|B_{j,\gamma}^{-1}\|_2^{2+2\alpha_{j,\gamma}} \|B_{j,\gamma}\|_2^4 |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2 \leq C \sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 h_{j,\gamma}^{2-2\alpha_{j,\gamma}} |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2. \quad (4.55)$$

On peut séparer les membres de droite de (4.53) et (4.55) en deux sommes selon que  $(0, 0) \in \overline{D}_{j,\gamma}$  ou non.

Si  $(0, 0) \in \overline{D}_{j,\gamma}$ , alors  $\alpha_{j,\gamma} = \alpha$ . Ainsi, l'hypothèse (4.22) implique :

$$h_{j,\gamma}^{2-2\alpha} \leq \zeta^{2-2\alpha} h^2.$$

De même, si  $(0, 0) \in \overline{D}'_{j,\gamma}$ , alors  $\alpha'_{j,\gamma} = \alpha$  et en appliquant l'hypothèse (4.24), on obtient

$$h'_{j,\gamma}{}^{2-2\alpha} \leq \zeta^{2-2\alpha} h^2.$$

Si  $(0, 0) \notin \overline{D}_{j,\gamma}$ , alors  $\alpha_{j,\gamma} = 0$  et  $H^{2,0}(\Omega) = H^2(\Omega)$ . Ainsi, en introduisant  $\alpha \neq 0$ , l'hypothèse (4.23) implique :

$$\begin{aligned} h_{j,\gamma}^2 |\phi|_{H^2(D_{j,\gamma})}^2 &= h_{j,\gamma}^2 \int_{D_{j,\gamma}} r^{-2\alpha} r^{2\alpha} \|H(\phi)\|_S^2 d\mathbf{x} \\ &\leq h_{j,\gamma}^2 \left[ \inf_{x \in D_{j,\gamma}} r(x) \right]^{-2\alpha} \int_{D_{j,\gamma}} r^{2\alpha} \|H(\phi)\|_S^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \zeta^2 h^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(D_{j,\gamma})}^2 \end{aligned}$$

En raisonnant de la même manière à partir de l'hypothèse (4.25), on en déduit que

$$h'_{j,\gamma}{}^2 |\phi|_{H^2(D'_{j,\gamma})}^2 \leq \zeta^2 h^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(D'_{j,\gamma})}^2.$$

Par conséquent, les membres de droite de (4.53), (4.54) et (4.55) sont majorés grâce aux inégalités suivantes

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 h_{j,\gamma}^{2-2\alpha_{j,\gamma}} |\phi|_{H^{2,\alpha_{j,\gamma}}(D_{j,\gamma})}^2 \leq \max\{\zeta^{2-2\alpha}, \zeta^2\} h^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2.$$

$$\sum_{j \in [1, J]} \sum_{\gamma=1}^2 h'_{j,\gamma}{}^{2-2\alpha'_{j,\gamma}} |\phi|_{H^{2,\alpha'_{j,\gamma}}(D'_{j,\gamma})}^2 \leq \max\{\zeta^{2-2\alpha}, \zeta^2\} h^2 |\phi|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2.$$

Finalement, on termine la preuve en utilisant le lemme 4.1 et en combinant la ligne précédente à (4.50), (4.51), (4.52), (4.53), (4.54) et (4.55).  $\square$

## 4.4 Résultats numériques

Le domaine de calcul est  $\Omega = ]-1; 1[^2 \setminus ]0; 1[^2$ , de telle sorte que  $\Omega$  a un coin rentrant en  $(0,0)$  d'angle intérieur  $\omega = \frac{3\pi}{2}$ . Les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que les solutions analytiques  $\psi$  du problème de Laplace avec conditions de Dirichlet et  $\phi$  du problème de Laplace avec conditions de Neumann, exprimées en coordonnées polaires centrées en  $(0,0)$ , sont données par

$$\psi(r, \theta) = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right),$$

et

$$\phi(r, \theta) = r^{2/3} \cos\left(\frac{2}{3}\theta\right) + c,$$

où  $c$  est un nombre réel tel que  $\int_{\Omega} \phi = 0$ . Ces fonctions correspondent aux parties singulières de  $\phi_c$  définies précédemment dans (4.4) et (4.5) mais étendues au domaine  $\Omega$  tout entier. Notons que  $\psi$  et  $\phi$  appartiennent à  $H^1(\Omega)$  mais ne sont pas dans  $H^2(\Omega)$ . Plus précisément,  $\psi$  et  $\phi$  appartiennent à  $H^{1+s}(\Omega)$  avec  $s < \frac{\pi}{\omega}$ , en d'autres termes  $s < 2/3$  ici (voir [57] pour plus d'explications). Dans ce qui suit, nous évaluons l'erreur discrète en semi-norme  $H^1$  sur les cellules-diamants définie par :

$$e^2(h) := \frac{\sum_{j \in [1, J]} |D_j| |(\nabla_h^D \bar{\phi})_j - (\nabla_h^D \Pi \phi)_j|^2}{\sum_{j \in [1, J]} |D_j| |(\nabla_h^D \Pi \phi)_j|^2},$$

où  $\phi$  et  $\bar{\phi}$  respectivement sont les solutions continues et numériques.

### 4.4.1 Maillages non-structurés sans raffinement local

Nous utilisons tout d'abord une famille de cinq maillages triangulaires non-structurés. Les deux premiers maillages de cette famille sont représentés sur la figure 4.3, tandis que les courbes d'erreur de  $\nabla \psi$  et  $\nabla \phi$  en norme  $L^2(\Omega)$  discrète sont représentées sur la figure 4.4, avec une droite de référence de pente  $2/3$ . L'ordre de convergence du schéma semble être  $2/3$  dans ce cas, comme dans [21, 38].

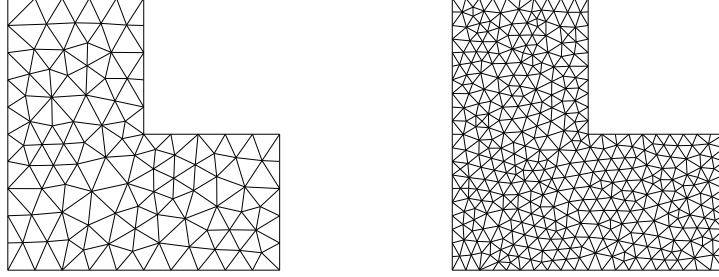
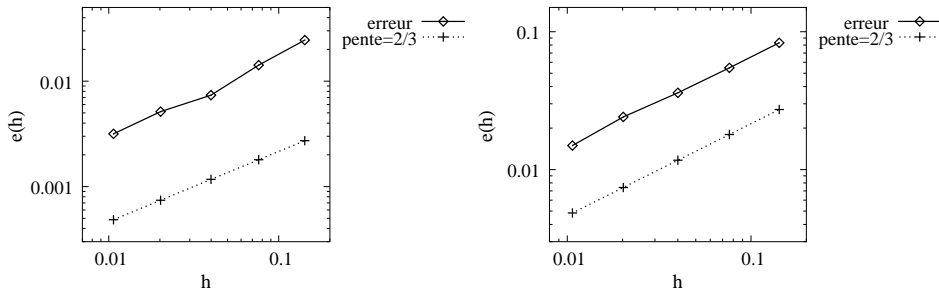


FIG. 4.3 – Maillages non-structurés.


 FIG. 4.4 – Erreurs de  $\nabla\psi$  et  $\nabla\phi$  dans la norme  $L^2$  pour des maillages non-structurés.

#### 4.4.2 Maillages structurés avec un raffinement local approprié

Pour la seconde famille de maillages, nous suivons [97] et [56]. On divise tout d'abord  $\Omega$  en triangles grossiers (dans notre cas, il y a six triangles structurés). Ensuite, chacun des triangles dont  $(0,0)$  n'est pas un sommet est divisé en  $n^2$  triangles avec  $n = 2, 4, 8, 16, 32$  de manière uniforme. Enfin, les triangles qui ont un sommet en  $(0,0)$  sont divisés de la manière suivante : les arêtes ayant  $(0,0)$  comme extrémité sont divisées tous les  $\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tandis que la troisième arête est divisée en  $n$  sous-segments de même longueur. Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ , nous joignons les points  $\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  appartenant aux deux arêtes ayant  $(0,0)$  comme extrémité avec un segment divisé en  $i$  sous-segments de même longueur. Ensuite, nous joignons les différents points pour former des triangles comme sur la figure 4.5. La construction de ce raffinement est aussi décrite et illustrée dans [97, 56].

Ainsi, par construction, le maillage primal, appelé maillage  $\alpha$ -raffiné, est régulier au sens

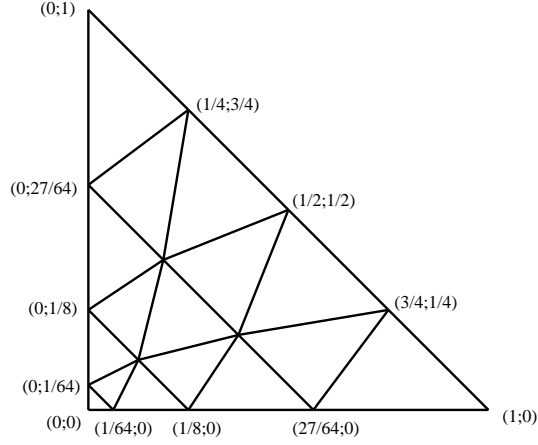


FIG. 4.5 – Construction d'un triangle  $\alpha$ -raffiné, avec  $\alpha = \frac{2}{3}$ , dont les sommets sont  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  et  $(0,1)$  avec  $n = 4$ .

de Ciarlet et satisfait les hypothèses

$$h_i \leq \zeta h^{1/1-\alpha}, \quad \text{si } (0,0) \in \bar{T}_i, \quad (4.56)$$

$$h_i \leq \zeta h \left[ \inf_{x \in T_i} r(x) \right]^\alpha, \quad \text{si } (0,0) \notin \bar{T}_i, \quad (4.57)$$

(voir [97, 56]), où nous notons  $h_i$  le diamètre de  $T_i$ . Remarquons que  $h$  défini à l'Hyp. 4.2 vérifie encore  $h = \max_{i \in [1, I]} h_i$ . Notons de plus  $\rho_i$  le diamètre du cercle inscrit de  $T_i$ .

Vérifions maintenant que les triangles  $D_{j,\gamma}$  et  $D'_{j,\gamma}$ ,  $\forall j \in [1, J], \forall \gamma \in \{1, 2\}$  satisfont aussi ces hypothèses :

(a) Convexité. Par construction, deux cellules voisines du maillage  $\alpha$ -raffiné forment un quadrilatère convexe (connaissant les coordonnées des points, nous pouvons calculer les équations des diagonales des cellules primales et vérifier qu'elles s'intersectent à l'intérieur de ces cellules), si bien que la cellule-diamant  $D_j$  qui se trouve à l'intérieur de ce quadrilatère, est nécessairement convexe.

(b) Hypothèses du théorème 4.2. Si  $G_i$  est le centre de gravité de  $T_i$  et un sommet de  $D_{j,\gamma}$ , il est clair que  $h_{j,\gamma} \leq h_i$  et que  $h'_{j,\gamma} \leq h_{j,1} + h_{j,2}$ . Par conséquent, puisque le maillage  $\alpha$ -raffiné vérifie les hypothèses (4.56) et (4.57), cela implique que les demi-diamants  $D_{j,\gamma}$  et  $D'_{j,\gamma}$  contenus dans ce maillage aussi (si  $(0,0) \in T_i$ , alors pour tout triangle  $D_{j,\gamma} \subset T_i$  tel que  $(0,0) \notin D_{j,\gamma}$ , on a  $h_{j,\gamma} \leq c \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ , où  $c > 0$  est une constante. Or  $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \leq C h \left[ \inf_{\mathbf{x} \in T_i} r(\mathbf{x}) \right]^\alpha$ , avec  $C > 0$ ).

(c) Régularité. Soit  $D_{j,\gamma}$  un demi-diamant contenu dans un triangle  $T_i$  du maillage  $\alpha$ -raffiné. On sait que  $|T_i| = 3 |D_{j,\gamma}|$ . D'autre part, la formule de Héron dans le triangle  $D_{j,\gamma}$  donne :  $|D_{j,\gamma}| = \rho_{j,\gamma} \frac{\text{périmètre de } D_{j,\gamma}}{2}$ , et dans  $T_i$  nous avons aussi :  $|T_i| = \rho_i \frac{\text{périmètre de } T_i}{2}$ . Puisque le périmètre de  $D_{j,\gamma}$  est inférieur au périmètre de  $T_i$ , nous en déduisons que  $\rho_i \leq 3 \rho_{j,\gamma}$ . En combinant cette inégalité avec  $h_{j,\gamma} \leq h_i$ , alors la régularité au sens de Ciarlet du maillage  $\alpha$ -raffiné implique la régularité des demi-diamants  $D_{j,\gamma}$  contenus dans ce maillage. En d'autres termes (voir [30, Hyp. (3.1.43)]), les angles des demi-diamants  $D_{j,\gamma}$  sont tous minorés par un angle  $\theta_0$ . Sachant de plus que les cellules primales et les cellules-diamants sont convexes, on en déduit que les angles des demi-diamants  $D'_{j,\gamma}$  sont eux aussi minorés, ce qui implique que la triangulation  $\{D'_{j,\gamma}\}_{j \in [1,J], \gamma \in \{1,2\}}$  est régulière. D'autre part, on en conclut que l'angle  $\theta_j$  de la figure 4.2 est bien minoré par un angle  $\theta^*$  indépendant du maillage. Ainsi, les cellules-diamants  $D_j$  contenues dans ce maillage satisfont l'hypothèse (4.19).

La figure 4.6 illustre les maillages obtenus pour  $n = 4$  et  $n = 8$ . Les courbes d'erreur de  $\nabla\psi$  et  $\nabla\phi$  sont montrées sur la figure 4.7, avec une droite de référence de pente 1. Il semble que l'ordre de convergence de ce schéma vaut un peu plus que 1 dans les deux cas.

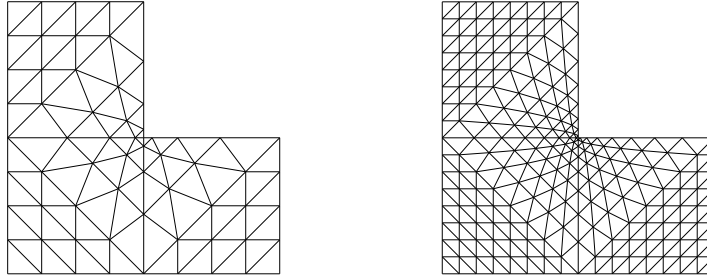
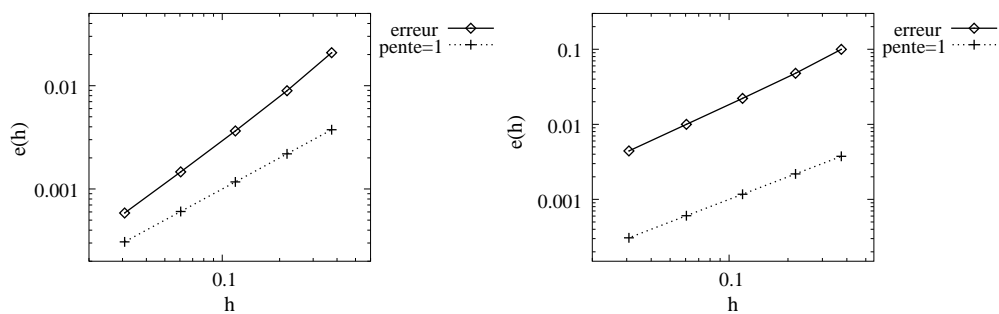


FIG. 4.6 – Maillages structurés  $\alpha$ -raffinés avec  $n = 4$  et  $n = 8$ .

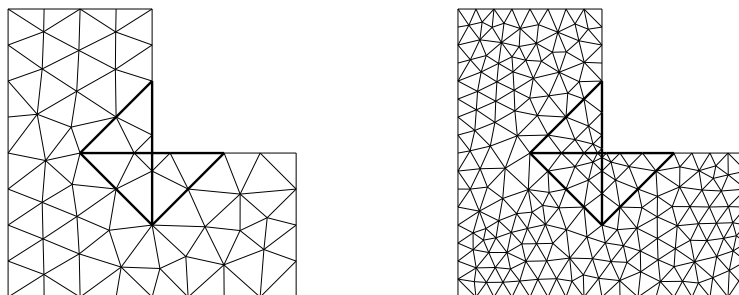
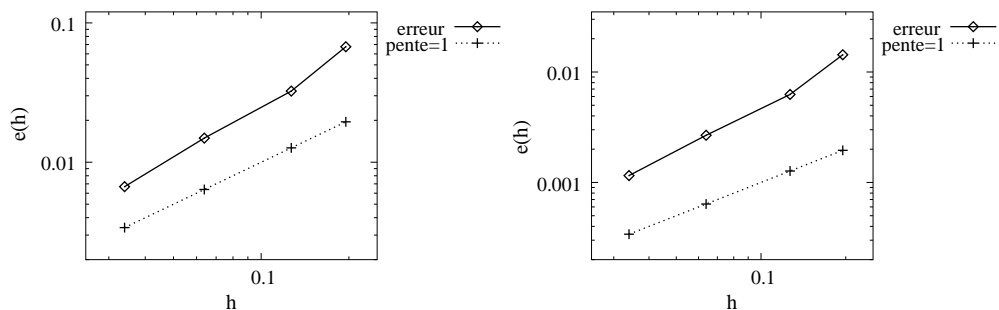
#### 4.4.3 Maillages non-structurés avec un raffinement local approprié

Enfin, nous testons aussi la méthode sur une troisième famille qui est localement  $\alpha$ -raffinée : les trois triangles grossiers ayant  $(0,0)$  comme sommet sont raffinés comme pour la deuxième famille de maillages avec  $n = 2, 4, 8, 16$ . Ensuite, le reste du domaine  $\Omega$  est découpé en triangles non-structurés. Cette famille de maillages est particulièrement intéressante puisqu'elle montre bien qu'un raffinement local est suffisant pour obtenir l'ordre de convergence optimal, sans




 FIG. 4.7 – Erreurs de  $\nabla\psi$  et  $\nabla\phi$  en norme  $L^2$  pour les maillages structurés  $\alpha$ -raffinés.

autre contrainte sur le maillage. Cela montre aussi que la perte de l'ordre de convergence se fait au niveau de la singularité. La figure 4.8 illustre les deux premiers maillages de cette famille. L'ordre de convergence du schéma semble être un peu plus de 1 pour  $\nabla\psi$  et  $\nabla\phi$  d'après la figure 4.9.


 FIG. 4.8 – Maillages  $\alpha$ -raffinés non-structurés avec  $n = 2$  et  $n = 4$ .

 FIG. 4.9 – Erreurs de  $\nabla\psi$  et  $\nabla\phi$  en norme  $L^2$  pour les maillages  $\alpha$ -raffinés non-structurés.

**Remarque 4.1** *Dans cette section, nous avons construit un raffinement local, proposé par [97], qui satisfait les hypothèses du théorème 4.2. Ce raffinement particulier nous a permis d'illustrer ce chapitre. Cependant, la mise en oeuvre d'un tel raffinement n'est pas aisée en pratique. On pourra donc se tourner vers d'autres méthodes qui permettent de générer "automatiquement" un raffinement local adapté, à l'aide d'estimations a posteriori par exemple, toute la difficulté étant que ce maillage satisfasse les hypothèses du théorème 4.2.*

## 4.5 Conclusion

De nombreux problèmes elliptiques sont gouvernés par le Laplacien, comme les problèmes de convection-diffusion, les problèmes de mécanique des fluides ou les problèmes Div-Rot par exemple. Ainsi, on peut appliquer les résultats obtenus dans ce chapitre aux problèmes Div-Rot du chapitre 3 et au problème de Stokes avec des conditions aux limites non-standard décrites dans le chapitre 5, discrétisés par la méthode DDFV.



## Chapitre 5

# Le problème de Stokes

Ce chapitre est tiré de l'article [38] s'intitulant "A finite volume method for the Stokes problem in two dimensions" en collaboration avec Pascal Omnes, soumis.

### 5.1 Introduction

Considérons l'approximation numérique au sens des volumes finis de la solution  $(\mathbf{u}, p)$  des équations de Stokes :

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega \quad (5.2)$$

complétées soit par une condition au bord sur la vitesse et une condition sur la pression

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0, \quad (5.3)$$

soit par une des conditions moins standard énoncées ci-dessous

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \omega_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad p = p_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} \omega = m_{\omega}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad \nabla \times \mathbf{u} = \omega_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} p = 0, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma \text{ sur } \Gamma, \quad p = p_d \text{ sur } \Gamma \text{ et } \int_{\Omega} \omega = m_{\omega}, \quad (5.7)$$

où  $\mathbf{f}$ ,  $g$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\sigma$ ,  $p_d$  et  $\omega_d$  sont des fonctions données et  $m_\omega$  est un nombre réel. Ces conditions au bord sont écrites ici dans le cas des domaines simplement connexes pour plus de simplicité mais elles seront étendues dans la suite du chapitre pour des domaines non-simplement connexes. Notons qu'il y a des conditions de compatibilité entre les données  $(g, \boldsymbol{\sigma})$ ,  $(g, \sigma)$  et  $(m_\omega, \sigma)$  qui seront spécifiées plus tard.

Ces conditions aux limites non-standard (étudiées par Dubois *et. al.* [43], par exemple) peuvent être traitées de manière très générale grâce à la formulation tourbillon-vitesse-pression du problème (pour des travaux plus anciens basés sur d'autres approches, nous renvoyons à [16] et [53]). Puisque

$$-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (5.8)$$

et en utilisant (5.2), on peut réécrire (5.1) de la manière suivante

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \nabla g \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.9)$$

De plus, en introduisant la vorticité  $\omega$ , l'éq. (5.9) peut être découplée en

$$\nabla \times \omega + \nabla p = \mathbf{f} + \nabla g \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \omega \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.11)$$

Il existe une vaste littérature concernant l'analyse mathématique et l'approximation numérique du problème (5.1)-(5.2)-(5.3), et son extension aux équations de Navier-Stokes. Nous nous référons par exemple à [75, 79] en ce qui concerne l'analyse mathématique, et à [55] qui passe en revue les méthodes numériques les plus courantes.

L'analyse mathématique du système (5.10)-(5.11)-(5.2) avec différentes conditions au bord a été donnée dans plusieurs références, parmi lesquelles [4, 5, 7, 41, 43]. Des méthodes d'éléments finis pour la formulation tourbillon-vitesse-pression ont été obtenues et analysées dans [4, 5, 42]. Des méthodes spectrales ont été considérées dans [7, 17] et [95], où une formulation au sens des moindres carrés est utilisée.

Dans ce présent travail, nous allons nous intéresser à la généralisation par volumes finis du schéma MAC (Marker and Cell) pour des maillages très généraux (pour d'autres approches en volumes finis, nous renvoyons à [19, 49, 51, 52]). Le schéma MAC fut développé initialement dans [58] sur des grilles rectangulaires décalées et étendu à ce qu'on appelle le schéma covolume utilisant des maillages de Delaunay-Voronoi dans [83]. Notons que la propriété d'orthogonalité de ces maillages représente un sérieux inconvénient, surtout dans le contexte de l'adaptation

de maillage. Le schéma MAC standard discrétise (5.1)-(5.2), tandis que le schéma covolume discrétise (5.10)-(5.11)-(5.2). Il est prouvé dans [83] que la discrétisation MAC peut être obtenue par le schéma covolume en utilisant des maillages triangulaires bien choisis. Étant donné un maillage (primal), les schémas MAC et covolume utilisent comme inconnues de vitesse les composantes normales du champ de vitesse sur les arêtes des volumes de contrôle tandis que les inconnues de pression sont situées au centre des cercles circonscrits. Ensuite la composante normale de l'éq. (5.1) ou (5.10) est intégrée sur des volumes de contrôle décalés, centrés sur les arêtes. En ce qui concerne le schéma MAC, une simple différence finie est utilisée pour évaluer la dérivée normale de l'inconnue de vitesse, tandis que dans le schéma covolume, les inconnues de vorticité sont évaluées aux sommets du maillage primal. Ce schéma est complété en intégrant l'éq. (5.11) sur les volumes de contrôle duaux centrés aux sommets et obtenus en joignant les centres des cercles circonscrits des cellules primales qui partagent un sommet commun. Compte tenu de la propriété d'orthogonalité sur les cellules primales et duales, les composantes tangentielles de la vitesse sur le maillage dual qui sont nécessaires pour discrétiser l'éq. (5.11) sont exactement les composantes normales sur les arêtes des volumes de contrôle primaux. Enfin, l'éq. (5.2) est intégrée sur les volumes de contrôle primaux.

Dans ce travail, nous allons présenter la méthode de volumes finis nommée DDFV (Discrete-Duality Finite Volume) [35], dans l'esprit de celle introduite dans [40] pour l'équation de Laplace et qui fut étendue au problème div-rot dans [36] ou dans le chapitre 3 de cette thèse. L'avantage de cette méthode de type covolume est de permettre l'utilisation de maillages presque arbitraires tels que les maillages non-structurés sans contrainte d'orthogonalité ainsi que les maillages non-conformes. Le prix à payer est de discrétiser *les deux* composantes de la vitesse sur les arêtes des volumes de contrôle (cellules primales), tandis que les inconnues de pression et de vorticité sont associées au centre des cellules primales *et*   leurs sommets, c'est à dire aux cellules duales. Ensuite, nous intégrons *les deux* composantes de (5.10) sur les cellules associées aux arêtes (appelées cellules-diamants) et (5.11) et (5.2) *  la fois* sur les cellules primales et sur les cellules duales. Ce processus nous conduit à utiliser des opérateurs différentiels discrets analogues aux opérateurs différentiels div, grad et rot qui apparaissent dans (5.10), (5.11) et (5.2). Ces opérateurs sont connus pour satisfaire des propriétés analogues aux propriétés vérifiées par les opérateurs continus (voir chapitre 2). A l'aide de ces propriétés, nous montrons d'une part, que la discrétisation DDFV appliquée aux équations de Stokes avec n'importe laquelle des conditions (5.4)   (5.7) peut être réduite à la résolu-

tion de quatre laplaciens impliquant la pression, la vorticité et les potentiels découlant de la décomposition de Hodge de la vitesse, alors que d'autre part, la solution de la discrétisation DDFV avec les conditions (5.3) peut être réduite à la solution d'une équation biharmonique discrète impliquant la fonction de courant.

Lorsque  $g = 0$  dans l'éq. (5.2), un autre avantage de ce schéma est de satisfaire la notion d' "incompressibilité renforcée" introduite dans le contexte des volumes-éléments finis dans [59] et dans le contexte des éléments finis dans [18] pour se débarrasser des modes de vitesse parasites (divergence pas exactement nulle) qui peuvent apparaître dans les simulations en Navier-Stokes instationnaire effectuées avec les éléments finis de Crouzeix-Raviart [32] d'ordre le plus faible. En effet, puisque ces éléments impliquent des inconnues de pression localisées aux centres de gravité des triangles seulement, la contrainte d'incompressibilité est satisfaite seulement autour des centres de gravité et le champ de vitesse résultant peut être à divergence non nulle au sens où la divergence discrète, lorsqu'elle est calculée autour des sommets du maillage peut ne pas s'annuler ou même ne pas être très petite. Un remède possible à ce problème, proposé par [18] et [59], est d'ajouter des inconnues de pression aux sommets du maillage, ce qui introduit des contraintes d'incompressibilité autour de ces noeuds. Ainsi, si on restreint la discussion aux maillages primaux triangulaires, le schéma présenté ici a exactement les mêmes inconnues que celles des schémas présentés dans [18] et [59], et les conditions d'incompressibilité sont écrites sur chaque triangle (cellule primale) et autour de chaque sommet (cellule duale) du maillage.

Le chapitre s'organise comme suit : dans la section 5.2, nous écrivons le schéma de volumes finis pour les problèmes de Stokes avec des conditions au bord données par (5.3)-(5.7). Puis nous présentons des résultats numériques de convergence sur des maillages non-structurés et sur des maillages non-conformes. Ensuite, dans la section 5.3, nous concluons ce travail en présentant le comportement de la solution pour des écoulements dans des cavités rectangulaires et une cavité circulaire à paroi défilante.

## 5.2 Application au problème de Stokes

### 5.2.1 Discrétisation des équations de Stokes en formulation tourbillon-vitesse-pressure.

Dans cette section, nous nous intéressons à l'approximation du problème continu donné par (5.2)-(5.10)-(5.11) associé à une des conditions (5.4) à (5.7). Nous choisissons de discrétiser la solution de ce problème par un vecteur  $(\mathbf{u}_j)$  avec  $j \in [1, J]$  pour la vitesse définie par ses valeurs sur les cellules-diamants du maillage et les scalaires  $(\omega_i^T, \omega_k^P)$  et  $(p_i^T, p_k^P)$ , avec  $i \in [1, I + J^\Gamma]$ ,  $k \in [1, K]$  pour la vorticité et la pression, définies par leurs valeurs sur les cellules primales et duales du maillage. Le problème se résout en deux étapes. Dans la première, on utilise la décomposition de Hodge de  $\mathbf{f} + \nabla g$  (voir Théorème 2.1) pour trouver  $p$  et  $\omega$ . Dans la seconde, nous résolvons un problème div-rot pour  $\mathbf{u}$ .

**  tape 1 :** La décomposition de Hodge discrète de la donnée  $\mathbf{f} + \nabla g$  s'écrit : Trouver  $p = (p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I + J^\Gamma], k \in [1, K]}$ ,  $\omega = (\omega_i^T, \omega_k^P)_{i \in [1, I + J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que

$$(\nabla_h^D p)_j + (\nabla_h^D \times \omega)_j = \mathbf{f}_j^D + (\nabla g)_j^D, \quad \forall j \in [1, J], \quad (5.12)$$

  quation à laquelle on ajoute une des conditions au bord suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_i^T = \omega_d(G_i), \quad \forall i \in \Gamma_0 ; \quad \omega_i^T = \omega_d(G_i) + c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \omega_k^P = \omega_d(S_k), \quad \forall k \in \Gamma_0 ; \quad \omega_k^P = \omega_d(S_k) + c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{i \in [1, I]} |T_i| p_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| p_k^P = 0, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

pour le cas où la vorticité  $\omega_d$  est donnée (   une constante près qu'on détermine sur chacune des frontières intérieures  $\Gamma_q$ ) sur la frontière (cas des conditions (5.4) et (5.6)), ou

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i^T = p_d(G_i), \quad \forall i \in \Gamma_0 ; \quad p_i^T = p_d(G_i) + c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ p_k^P = p_d(S_k), \quad \forall k \in \Gamma_0 ; \quad p_k^P = p_d(S_k) + c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \omega_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \omega_k^P = m_\omega, \end{array} \right. \quad (5.14)$$

pour le cas où la pression  $p_d$  est donnée (   une constante près qu'on détermine sur chacune des frontières intérieures) sur la frontière (cas des conditions (5.5) et (5.7)). Dans (5.12), nous avons posé

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j^D &= \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall j \in [1, J], \\ (\nabla g)_j^D &= \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \nabla g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall j \in [1, J]. \end{aligned} \quad (5.15)$$



Les deux problèmes impliquant les équations (5.12) et (5.13) d'une part, et les équations (5.12) et (5.14) d'autre part sont résolus de façon similaire, c'est pourquoi nous n'allons détailler que la solution de (5.12)-(5.13).

**Proposition 5.1** *Le problème (5.12)-(5.13) peut se découpler en deux sous-problèmes indépendants : trouver  $(\omega_i^T, \omega_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que*

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \omega)_i = (\nabla_h^T \times \mathbf{s})_i, \quad \forall i \in [1, I], \\ (-\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \omega)_k = (\nabla_h^P \times \mathbf{s})_k, \quad \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ -\sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \omega)_k = \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \times \mathbf{s})_k, \quad \forall q \in [1, Q], \\ (\nabla_h^D \omega \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_{q,h}} = -(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau})_{\Gamma_{q,h}}, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \omega_i^T = \omega_d(G_i), \quad \forall i \in \Gamma_0 \quad ; \quad \omega_i^T = \omega_d(G_i) + c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \omega_k^P = \omega_d(S_k), \quad \forall k \in \Gamma_0 \quad ; \quad \omega_k^P = \omega_d(S_k) + c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \end{array} \right. \quad (5.16)$$

où  $\mathbf{s} := \mathbf{f} + (\nabla g)$  et, une fois que  $\omega$  est calculé, trouver  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D p)_i = (\nabla_h^T \cdot (\mathbf{s} - \nabla_h^D \times \omega))_i, \quad \forall i \in [1, I], \\ (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D p)_k = (\nabla_h^P \cdot (\mathbf{s} - \nabla_h^D \times \omega))_k, \quad \forall k \in [1, K], \\ (\nabla_h^D p)_j \cdot \mathbf{n}_j = (\mathbf{s}_j - (\nabla_h^D \times \omega)_j) \cdot \mathbf{n}_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \\ \sum_{i \in [1, I]} |T_i| p_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| p_k^P = 0. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

**Preuve** En appliquant l'opérateur rotationnel vecteur discret à (5.12) sur les cellules primales et les cellules duales intérieures, on obtient les deux premières lignes de (5.16), grâce à (2.20) et à la Prop. 2.3.

Ensuite, pour un  $q \in [1, Q]$  donné, on considère  $\psi_i^T = 1, \forall i \in \Gamma_q$ , et  $\psi_i^T = 0$  partout ailleurs, et  $\psi_k^P = 0$  partout. Puis, on calcule le produit scalaire (2.3) de l'éq. (5.12) avec  $\nabla_h^D \times \psi$  :

$$(\nabla_h^D \times \omega, \nabla_h^D \times \psi)_D + (\nabla_h^D p, \nabla_h^D \times \psi)_D = (\mathbf{s}, \nabla_h^D \times \psi)_D. \quad (5.18)$$

En utilisant l'orthogonalité de  $\nabla_h^D p$  et  $\nabla_h^D \times \psi$  (voir la dernière ligne de la Prop. 2.1), la formule de Green discrète (2.14) et la Prop. 2.3, nous déduisons

$$\begin{aligned} (\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{s}, \psi)_{T,P} - (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}, \psi)_{\Gamma,h} = \\ -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \omega, \psi)_{T,P} - (\nabla_h^D \times \omega \cdot \boldsymbol{\tau}, \psi)_{\Gamma,h}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

De plus, en utilisant le fait que  $\psi$  s'annule partout sauf sur les points frontières  $G_i$ , le premier terme dans le membre de gauche et le premier terme dans le membre de droite de (5.19) sont

nuls. Finalement, puisque  $\nabla_h^D \times \omega \cdot \tau = -\nabla_h^D \omega \cdot \mathbf{n}$ , et en utilisant la définition (2.4) et les valeurs de  $\psi$ , (5.19) implique que

$$(\mathbf{s} \cdot \tau, \frac{1}{2})_{\Gamma_q, h} = -(\nabla_h^D \omega \cdot \mathbf{n}, \frac{1}{2})_{\Gamma_q, h}$$

ce qui revient à la quatrième ligne de (5.16).

Enfin, en choisissant  $\psi_i^T = 1, \forall i \in \Gamma_q$ , et  $\psi_k^P = 1, \forall k \in \Gamma_q$ , et zéro partout ailleurs, le produit scalaire de l'éq. (5.12) avec  $\nabla_h^D \times \psi$  conduit de même que précédemment à (5.18) et (5.19), et en utilisant les valeurs de  $\psi$  et la quatrième ligne de (5.16), nous obtenons la troisième ligne de (5.16).

Une fois que  $\omega$  est calculé, (5.17) est obtenu en appliquant l'opérateur divergence discrète (2.9) à (5.12), ainsi que les conditions (5.13) et la propriété (2.19).  $\square$

Il a été montré, dans la proposition 3.2, que les systèmes du type (5.16) et (5.17) ont tous les deux une unique solution.

**Étape 2 :** Une fois que  $(\omega_i^T, \omega_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  a été calculé lors de l'étape 1, on résout un problème div-rot pour  $\mathbf{u}$  : étant donné  $(k_q)_{q \in [1, Q]}$ , trouver  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_h^{T, P} \cdot \mathbf{u})_{i, k} &= g_{i, k}^{T, P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \\ (\nabla_h^{T, P} \times \mathbf{u})_{i, k} &= \omega_{i, k}^{T, P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j &= \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \\ (\mathbf{u} \cdot \tau, 1)_{\Gamma_q, h} &= k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k &= \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| \omega_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \end{array} \right. \quad (5.20)$$

dans le cas d'un champ de vitesse normal donné sur la frontière (éq. (5.4) et (5.5)) ou

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_h^{T, P} \cdot \mathbf{u})_{i, k} &= g_{i, k}^{T, P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ (\nabla_h^{T, P} \times \mathbf{u})_{i, k} &= \omega_{i, k}^{T, P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \\ \mathbf{u}_j \cdot \tau_j &= \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q, h} &= k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k &= \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| g_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \end{array} \right. \quad (5.21)$$

dans le cas d'un champ de vitesse tangentiel donné sur la frontière (éq. (5.6) et (5.7)).

Dans (5.20) et (5.21), nous avons posé

$$g_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall i \in [1, I], \quad g_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall k \in [1, K], \quad (5.22)$$

$$\sigma_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \sigma(\xi) \, d\xi \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]. \quad (5.23)$$

De plus, les seconds membres doivent satisfaire des conditions de compatibilité. En effet, on se rend compte à la lecture des définitions des opérateurs divergence (2.9) et rotationnel (2.12) que nous avons les relations suivantes :

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = \sum_{j \in [J-J^\Gamma+1, J]} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j \quad (5.24)$$

et

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k = \sum_{j \in [J-J^\Gamma+1, J]} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j. \quad (5.25)$$

Ainsi, dans (5.20), les seconds membres doivent satisfaire

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| g_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| g_k^P = \sum_{j \in [J-J^\Gamma+1, J]} |A_j| \sigma_j. \quad (5.26)$$

Cette relation est vraie grâce aux définitions (5.22) et (5.23) puisque

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| g_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| g_k^P = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

et

$$\sum_{j \in [J-J^\Gamma+1, J]} |A_j| \sigma_j = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \, d\xi.$$

Le fait que les membres de droite des deux égalités précédentes soient identiques provient de l'intégration de (5.2) sur  $\Omega$ , de l'application de la formule de Green et des conditions aux limites sur  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  dans (5.4) et (5.5).

De même, dans (5.21), le membre de droite doit satisfaire

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \omega_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \omega_k^P = \sum_{j \in [J-J^\Gamma+1, J]} |A_j| \sigma_j. \quad (5.27)$$

Dans le cas des conditions données par (5.14), les deux premiers termes de (5.27) sont égaux à  $m_\omega$  et le dernier terme de (5.27) est égal à  $\int_{\Gamma} \sigma(\xi) \, d\xi$ . Ces deux quantités sont nécessairement identiques compte tenu de l'intégration de (5.11) sur  $\Omega$ , l'application de la formule de Green et des conditions au bord sur  $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$  dans (5.6) et (5.7). En revanche, dans le cas des conditions aux limites données par (5.13), les deux premiers termes de (5.27) ne sont jamais imposés, mais sont les résultats des calculs provenant de la première étape de notre procédure (voir éq. (5.16)), de telle sorte que la condition de compatibilité (5.27) peut ne pas être vérifiée en général. Un moyen pour surmonter ce problème est de changer  $\omega_i^T$  en  $\omega_i^T + c^T$  et  $\omega_k^P$  en

$\omega_k^P + c^P$  pour tout  $i \in [1, I]$  et pour tout  $k \in [1, K]$ , avec deux constantes  $c^T$  et  $c^P$  calculées de telle sorte que (5.27) soit satisfait. Notons qu'en procédant ainsi, on ne change pas la valeur de  $\nabla_h^D \omega$ , de sorte que le  $\omega$  modifié vérifie encore le système (5.16) mais avec des conditions aux limites translatées d'une constante  $c^T$  pour les inconnues aux centres des arêtes de bord et d'une constante  $c^P$  pour les inconnues aux sommets des arêtes de bord. Cela peut être interprété comme une condition de compatibilité implicite entre les conditions au bord  $\omega_d$  et  $\sigma$  dans (5.6).

Maintenant, en utilisant la décomposition de Hodge discrète de  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$ , chacun des problèmes (5.20) et (5.21) peut être découpé en deux sous-problèmes impliquant les potentiels. Nous détaillerons seulement les systèmes résultant du problème (5.20) en utilisant la décomposition de Hodge avec les conditions aux limites (2.26) à (2.28). On obtient un résultat similaire pour le problème (5.21) en utilisant la décomposition de Hodge avec les conditions aux limites (2.31) à (2.33).

La preuve de la proposition suivante est donnée dans le chapitre 3 (Prop. 3.1).

**Proposition 5.2** *Le problème (5.20) peut se découpler en deux sous-problèmes indépendants : trouver  $(\phi_i^T, \phi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  tels que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \phi)_{i,k} &= g_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \\ (\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j &= \sigma_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma, J], \\ \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \phi_i^T &= \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \phi_k^P = 0, \end{array} \right. \quad (5.28)$$

*et trouver  $(\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \psi)_{i,k} &= \omega_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K - J^\Gamma], \\ -(\nabla_h^D \psi \cdot \mathbf{n}, 1)_{\Gamma_q, h} &= k_q, \quad \forall q \in [1, Q], \\ -\sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \psi)_k &= \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| \omega_k^P, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \psi_i^T = \psi_k^P &= 0, \quad \forall i \in \Gamma_0, \forall k \in \Gamma_0, \\ \forall q \in [1, Q], \quad \psi_i^T = c_q^T, \quad \psi_k^P = c_q^P, &\quad \forall i \in \Gamma_q, \forall k \in \Gamma_q. \end{array} \right. \quad (5.29)$$

*Ces deux sous-problèmes ont tous les deux une solution unique et le vecteur  $\mathbf{u}$  est alors reconstruit par  $\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \phi)_j + (\nabla_h^D \times \psi)_j$ .*

### 5.2.2 Discrétisation des équations de Stokes en formulation vitesse-pression

Dans cette section, nous sommes intéressés par l'approximation du problème continu donné par (5.9)-(5.2) associé à la condition (5.3). Ce système est discrétisé par

$$(\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_j + (\nabla_h^D p)_j = \mathbf{s}_j, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma], \quad (5.30a)$$

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = g_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \quad (5.30b)$$

$$\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \quad (5.30c)$$

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| p_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| p_k^P = 0, \quad (5.30d)$$

où nous rappelons que  $\mathbf{s}_j := \mathbf{f}_j + (\nabla_h^D g)_j$ . Notons que contrairement à la décomposition de Hodge (5.12), l'éq. (5.30a) est imposée seulement sur les cellules-diamants intérieures. Dans la suite, les maillages vérifient l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.1** *Nous supposons que chaque cellule primale frontière a seulement une arête qui appartient à la frontière  $\Gamma$ .*

**Remarque 5.1** *Ce n'est pas une restriction sévère en soit puisque nous pouvons toujours découper les cellules frontières de telle sorte que le maillage résultant vérifie cette hypothèse.*

**Proposition 5.3** *Sous l'Hyp. 5.1, la solution  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}, (p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  de (5.30a)-(5.30d) existe et est unique.*

**Preuve** Le système (5.30a) à (5.30d) fournit  $2(J - J^\Gamma) + (I + K) + 2J^\Gamma + 2 = 2J + I + K + 2$  équations. D'autre part, on dénombre  $2J$  inconnues de vitesse  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  et  $I + K$  inconnues de pression  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$ . De plus, les équations (5.30b) et (5.30c) ne sont pas indépendantes puisque par définition

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = \sum_{j \in \Gamma} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j,$$

ce qui implique, par (5.30b) et (5.30c), que la relation suivante doit être vérifiée

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| g_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| g_k^P = \sum_{j \in \Gamma} |A_j| \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n}_j,$$

ce qui est le cas grâce à (5.22) et (5.23). Ainsi, nous avons  $2J + I + K$  équations indépendantes et autant d'inconnues. Il reste à montrer l'injectivité du système. Supposons que  $\mathbf{s}_j = 0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_j = 0$

et  $g_{i,k}^{T,P} = 0$ . En utilisant  $\mathbf{s}_j = 0, \forall j \in [1, J - J^\Gamma]$  dans (5.30a) et  $\mathbf{u}_j = 0, \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$ , il est évident que :

$$\left[ (\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_j + (\nabla_h^D p)_j \right] \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J].$$

De plus, en multipliant l'équation précédente par  $|D_j|$  et en sommant sur les  $j \in [1, J]$ , on obtient

$$(\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \mathbf{u})_D + (\nabla_h^D p, \mathbf{u})_D = 0.$$

En appliquant les formules de Green discrètes (2.13) et (2.14) à la ligne précédente, et puisque  $\mathbf{u}_j = 0$  sur  $\Gamma$ , nous obtenons :

$$(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{T,P} - (p, \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{T,P} = 0. \quad (5.31)$$

Sachant que  $g_{i,k}^{T,P} = 0$ , nous avons  $(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = 0, \forall i \in [1, I], k \in [1, K]$ , qui, associé à (5.31) implique que  $(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k} = 0, \forall i \in [1, I], k \in [1, K]$ . Comme  $\sigma_j = 0$ , nous avons également  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = 0, \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$  et aussi  $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, 1)_{\Gamma_q, h} = 0$ . Les inconnues  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  sont donc solutions d'un problème Div-Rot à données nulles. On peut donc conclure grâce au chapitre 3 que

$$\mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J].$$

Puisque  $\mathbf{u}_j = 0$ , l'éq. (5.30a) montre que  $(\nabla_h^D p)_j = 0$ , pour toutes les cellules-diamants intérieures, ce qui implique, d'après (2.7), que

$$p_{i_2(j)}^T = p_{i_1(j)}^T \text{ et } p_{k_2(j)}^P = p_{k_1(j)}^P, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma]. \quad (5.32)$$

Etant donné que le domaine est connexe, toutes les paires de cellules primales peuvent être jointes par un nombre fini d'arêtes duales intérieures. Alors (5.32) implique que tous les  $p_i^T$  sont égaux à la même constante  $c^T$ . Concernant les noeuds frontières  $S_k$ , l'Hyp. 5.1 permet d'assurer que tous les noeuds sont sommets d'au moins une cellule-diamant intérieure. Par conséquent, puisque le domaine est connexe, (5.32) implique que tous les  $p_k^P$  sont égaux à la même constante  $c^P$ . Finalement, en utilisant (5.30d), nous concluons que :

$$\forall i \in [1, I], p_i^T = 0 \text{ et } \forall k \in [1, K], p_k^P = 0.$$

□

**Remarque 5.2** Dans le problème continu, la vorticité est calculée par  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$  quand la solution  $\mathbf{u}$  est connue. D'une manière similaire, une fois que  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  a été calculée par la proposition 5.3, l'approximation  $(\omega_i^T, \omega_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  de la vorticité  $\omega$  sur les cellules primales et duales est obtenue en utilisant l'opérateur  $\nabla_h^{T, P} \times$  défini en (2.12) de telle sorte que

$$\omega_{i,k}^{T,P} = (\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k}, \quad \forall i \in [1, I], k \in [1, K]. \quad (5.33)$$

Ensuite, nous explorons le lien avec la fonction de courant. En effet, si  $g = 0$  et  $\sigma = 0$  dans le problème continu, il existe  $\psi$  tel que  $\mathbf{u} = \nabla \times \psi$ . De plus,  $\psi = 0$  sur la frontière  $\Gamma_0$  et il existe  $Q$  constantes  $c_q$  telles que  $\psi = c_q$  sur  $\Gamma_q$  pour  $q \in [1, Q]$  et finalement  $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma$ . Il est bien connu, voir par exemple [55], qu'un tel  $\psi$  est la solution d'une équation biharmonique. Il ressort que notre formulation volume fini reproduit ce comportement. Avant d'établir ce résultat, nous avons besoin de notations additionnelles relatives aux frontières. Pour tout  $q \in [0, Q]$ , nous allons noter  $J^{\Gamma_q}$  le nombre d'arêtes du maillage qui sont situées sur  $\Gamma_q$ . Notons qu'il y a par conséquent  $J^{\Gamma_q}$  noeuds, et compte tenu de l'Hyp. 5.1, un nombre équivalent de cellules primales qui ont une arête qui appartient à  $\Gamma_q$ . Pour tout  $q$ , nous allons noter  $S_q$  l'ensemble des indices de ces cellules primales frontières. Nous allons supposer de plus que l'ensemble  $[1, I]$  est ordonné de telle sorte que  $i \in [I - J^{\Gamma} + 1, I]$  si et seulement si la cellule primale  $T_i$  a une arête qui appartient à  $\Gamma$ .

**Proposition 5.4** Soit  $\mathbf{u}$  la solution de (5.30a)   (5.30d). Si  $g = 0$  et  $\sigma = 0$ , il existe  $\psi = (\psi_i^T, \psi_k^P)_{i \in [1, I+J^{\Gamma}], k \in [1, K]}$  et  $(c_q^T, c_q^P)_{q \in [1, Q]}$  tels que  $\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \times \psi)_j$  pour tout  $j \in [1, J]$  et  $\psi$  est la solution du problème biharmonique discret

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \left( \Delta_h^{T,P} \right)^2 \psi \right]_{i,k} = (\nabla \times \mathbf{f})_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I - J^{\Gamma}], \forall k \in [1, K - J^{\Gamma}], \\ \sum_{i \in S_q} |T_i| \left[ \left( \Delta_h^T \right)^2 \psi \right]_i - \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| (\nabla_h^D (\Delta_h^{T,P} \psi))_j \cdot \mathbf{n}_j = \\ \sum_{i \in S_q} |T_i| (\nabla \times \mathbf{f})_i^T - \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| \mathbf{f}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| \left[ \left( \Delta_h^P \right)^2 \psi \right]_k - \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| (\nabla_h^D (\Delta_h^{T,P} \psi))_j \cdot \mathbf{n}_j = \\ \sum_{k \in \Gamma_q} |P_k| (\nabla \times \mathbf{f})_k^P - \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| \mathbf{f}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \quad \forall q \in [1, Q], \\ \psi_i^T = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0 \cup S_0, \quad \psi_k^P = 0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \\ \psi_i^T = c_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q \cup S_q, \quad \psi_k^P = c_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \end{array} \right. \quad (5.34)$$

où nous avons posé  $\Delta_h^{T,P} := \nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D$  et  $\left( \Delta_h^{T,P} \right)^2 := \Delta_h^{T,P} \circ \Delta_h^{T,P}$ .

**Preuve** D'abord, puisque  $g = 0$ , alors  $\mathbf{s} = \mathbf{f}$ . Ensuite, considérons la décomposition de Hodge discrète de  $\mathbf{u}$  donnée par le théorème 2.1. Nous allons prouver que  $\phi$  est nul. En effet,

$$0 = (\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = (\nabla_h^{T,P} \cdot (\nabla_h^D \phi + \nabla_h^D \times \psi))_{i,k} = (\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \phi)_{i,k} \quad (5.35)$$

pour tout  $i \in [1, I]$  et pour tout  $k \in [1, K]$ , grâce à la Prop. 2.2. Compte tenu de la définition de l'opérateur rotationnel discret et puisque  $\psi$  est constant sur chaque  $\Gamma_q$ , on en déduit que  $(\nabla_h^D \times \psi)_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$  pour tout  $j \in \Gamma$ . D'autre part,  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$ , ce qui implique que

$$(\nabla_h^D \phi)_j \cdot \mathbf{n}_j = 0, \quad \forall j \in \Gamma. \quad (5.36)$$

Avec les équations (5.35) et (5.36) et la formule de Green discrète (2.13), on obtient donc

$$0 = (\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \phi, \phi)_{T,P} = -(\nabla_h^D \phi, \nabla_h^D \phi)_D,$$

ce qui signifie que  $(\nabla_h^D \phi)_j$  s'annule pour tout  $j$ . Alors, on déduit de la définition de l'opérateur gradient discret que tous les  $\phi_i^T$  sont égaux à la même constante  $\alpha$  et que tous les  $\phi_k^P$  sont égaux à la même constante  $\beta$ . Mais d'après (2.26), ces constantes s'annulent, si bien que  $\phi$  est lui-même nul. Alors  $\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \times \psi)_j$  pour tout  $j \in [1, J]$  et  $\psi$  vérifie les équations (2.27) et (2.28), qui représentent seulement une partie des deux dernières équations de (5.34). Ensuite, puisque  $\mathbf{u}_j = (\nabla_h^D \times \psi)_j = 0$  sur  $\Gamma$ , nous déduisons que  $\psi_i^T = 0$  pour tout  $i \in S_0$  et  $\psi_i^T = c_q^T$  pour tout  $i \in S_q$ , ce qui complète les deux dernières équations de (5.34). Puisque  $\mathbf{u} = (\nabla_h^D \times \psi)$ , il découle de la Prop. 2.3 que  $\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u} = -\Delta_h^{T,P} \psi$ .

Considérons maintenant  $\theta = (\theta_i^T, \theta_k^P)$  tel que

$$\begin{cases} \theta_i^T = 0, \quad \forall i \in \Gamma_0 \cup S_0, \quad \theta_k^P = 0, \quad \forall k \in \Gamma_0, \\ \theta_i^T = a_q^T, \quad \forall i \in \Gamma_q \cup S_q, \quad \theta_k^P = a_q^P, \quad \forall k \in \Gamma_q, \quad \forall q \in [1, Q], \end{cases} \quad (5.37)$$

où  $a_q^T$  et  $a_q^P$  sont  $2Q$  constantes arbitraires. On a évidemment  $(\nabla_h^D \times \theta)_j = 0$ , pour tout  $j \in \Gamma$ . D'autre part, avec (5.30a), on peut donc écrire

$$\left[ -(\nabla_h^D \times \Delta_h^{T,P} \psi)_j + (\nabla_h^D p)_j \right] \cdot (\nabla_h^D \times \theta)_j = \mathbf{f}_j \cdot (\nabla_h^D \times \theta)_j, \quad \forall j \in [1, J].$$

Ainsi,

$$-(\nabla_h^D \times \Delta_h^{T,P} \psi, \nabla_h^D \times \theta)_D + (\nabla_h^D p, \nabla_h^D \times \theta)_D = (\mathbf{f}, \nabla_h^D \times \theta)_D.$$

En appliquant la formule de Green (2.14) à la ligne précédente, et puisque  $\nabla_h^D p$  et  $\nabla_h^D \times \theta$  sont orthogonaux, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left( \left( \Delta_h^{T,P} \right)^2 \psi, \theta \right)_{T,P} + (\nabla_h^D \times (\Delta_h^{T,P} \psi) \cdot \boldsymbol{\tau}, \theta)_{\Gamma,h} = \\ (\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{f}, \theta)_{T,P} - (\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}, \theta)_{\Gamma,h}. \end{aligned} \quad (5.38)$$



Si nous choisissons  $a_q^T = a_q^P = 0$  pour tout  $q \in [1, Q]$  dans (5.37), les produits scalaires correspondant au bord dans (5.38) s'annulent, et puisque les valeurs de  $\theta$  sont arbitraires pour  $i \in [1, I - J^\Gamma]$  et  $k \in [1, K - J^\Gamma]$ , nous obtenons la première équation de (5.34). Maintenant, pour un  $q \in [1, Q]$  donné, considérons le cas particulier  $a_q^T = 1$ ,  $a_{q'}^T = 0$  si  $q' \neq q$  et  $a_{q'}^P = 0$  pour tout  $q' \in [1, Q]$  dans (5.37), et  $\theta$  s'annulant partout sinon, l'éq. (5.38) se réduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i \in S_q} |T_i| \left[ (\Delta_h^T)^2 \psi \right]_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| (\nabla_h^D (\Delta_h^{T,P} \psi))_j \cdot \mathbf{n}_j = \\ \frac{1}{2} \sum_{i \in S_q} |T_i| (\nabla \times \mathbf{f})_i^T - \frac{1}{2} \sum_{j \in \Gamma_q} |A_j| \mathbf{f}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j, \end{aligned}$$

ce qui conduit à la seconde équation de (5.34). La troisième équation de (5.34) est obtenue d'une manière similaire en choisissant dans (5.37)  $a_{q'}^T = 0$  pour tout  $q' \in [1, Q]$  et  $a_q^P = 1$  et  $a_{q'}^P = 0$  si  $q' \neq q$  et  $\theta$  s'annulant partout ailleurs sinon.  $\square$

**Proposition 5.5** *Le système biharmonique (5.34) a une solution unique.*

**Preuve** Nous venons juste de prouver que ce système a une solution pour toute donnée  $\mathbf{f}$ . Ainsi, il suffit de montrer qu'il y a autant d'équations que d'inconnues dans le système pour prouver l'unicité. C'est justement le cas puisqu'on dénombre  $I + K + J^\Gamma$  inconnues pour  $\psi$  et  $2Q$  inconnues correspondant aux constantes  $(c_q^T, c_q^P)$ , alors que la première ligne de (5.34) fournit  $I + K - 2J^\Gamma$  équations, les seconde et troisième lignes donnent chacune  $Q$  équations, auxquelles on ajoute  $2J^\Gamma$  équations provenant des deux dernières lignes, comme nous l'avons expliqué précédemment avant la Prop. 5.4.  $\square$

### 5.2.3 Discrétisation des équations de Stokes avec des conditions mixtes

On s'intéresse ici au problème de Stokes (5.1)-(5.2) avec des conditions mixtes, c'est à dire avec la condition au bord (5.3) sur une partie de la frontière, notée  $\Gamma_D$  sans ses bords, et la condition (5.4) sur l'autre partie de la frontière, notée  $\Gamma_N$  qui inclut ses bords. En ce qui concerne la condition aux limites sur  $\Gamma_N$ , d'autres choix sont possibles comme les conditions (5.5), (5.6) ou encore (5.7), moyennant une légère adaptation dans ce qui va suivre. On note, de plus,  $J^{\Gamma_D}$  et  $J^{\Gamma_N}$  les nombres d'arêtes de  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  respectivement, de telle sorte que  $J^{\Gamma_D} + J^{\Gamma_N} = J^\Gamma$ , et  $K^{\Gamma_N}$  le nombre de noeuds sur  $\Gamma_N$  (incluant donc les noeuds de  $J^{\Gamma_N}$ ).

Pour  $j \in \Gamma$ , nous supposons que lorsque  $A_j \subset \Gamma_N$ , alors  $j \in [J - J^\Gamma + 1, J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}]$ , tandis que lorsque  $A_j \in \Gamma_D$ , alors  $j \in [J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N} + 1, J]$ . D'autre part, les inconnues de vitesse  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  sont situées sur les cellules-diamants, tandis que les inconnues de pression  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I + J^{\Gamma_N}], k \in [1, K]}$  et de vorticité  $(\omega_i^T, \omega_k^P)_{i \in [1, I + J^{\Gamma_N}], k \in [1, K]}$  sont situées sur les cellules primales et duales, et au milieu  $G_{i_2(j)}$  de chacune des arêtes de la frontière  $\Gamma_N$ .

Enfin, on utilise le fait que  $-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}$ . Ainsi, étant donnés  $\mathbf{f}$ ,  $g$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\lambda$  et  $\omega_d$ , le problème continu s'écrit

$$\nabla \times \omega + \nabla p = \mathbf{f} + \nabla g \text{ sur } \Omega, \quad (5.39a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = g \text{ sur } \Omega, \quad (5.39b)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \omega \text{ sur } \Omega, \quad (5.39c)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \text{ sur } \Gamma_D, \quad (5.39d)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \lambda \text{ sur } \Gamma_N, \quad (5.39e)$$

$$\omega = \omega_d \text{ sur } \Gamma_N, \quad (5.39f)$$

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (5.39g)$$

En s'inspirant des discrétisations utilisées en sections 5.2.1 et 5.2.2, on intègre l'équation (5.39a) sur les cellules-diamants intérieures ainsi que sur les cellules-diamants de la frontière  $\Gamma_N$ . Les équations (5.39b) et (5.39g) sont quant à elles intégrées sur les cellules primales et les cellules duales. Enfin, l'équation (5.39d) est discrétisée sur chacune des cellules-diamants de  $\Gamma_D$ , tandis que les équations (5.39e) et (5.39f) sont discrétisées sur les arêtes  $A_j \subset \Gamma_N$ . Nous faisons, de plus, l'hypothèse suivante sur le maillage primal :

**Hypothèse 5.2** *Nous supposons que chaque cellule primale frontière de  $\Gamma_D$  a une seule arête qui appartient à  $\Gamma_D$ .*

Ainsi, on en déduit le système discrétisé suivant :

$$(\nabla_h^D \times \omega)_j + (\nabla_h^D p)_j = \mathbf{s}_j, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}], \quad (5.40a)$$

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = g_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \quad (5.40b)$$

$$(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k} = \omega_{i,k}^{T,P}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \notin \Gamma_N, \quad (5.40c)$$

$$\mathbf{u}_j = \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \forall j \in \Gamma_D, \quad (5.40d)$$

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = \lambda_j, \quad \forall j \in \Gamma_N, \quad (5.40e)$$

$$\omega_{k_1(j)}^P = \omega_d(S_{k_1(j)}), \quad \omega_{k_2(j)}^P = \omega_d(S_{k_2(j)}) \quad ; \quad \omega_{i_2(j)}^T = \omega_d(G_{i_2(j)}), \quad \forall j \in \Gamma_N, \quad (5.40f)$$

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| p_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| p_k^P = 0, \quad (5.40g)$$

où nous rappelons que  $\mathbf{s}_j := \mathbf{f}_j + (\nabla_h^D g)_j$  et nous avons posé

$$\mathbf{f}_j = \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma], \quad (5.41)$$

$$g_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall i \in [1, I] \quad ; \quad g_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall k \in [1, K], \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \boldsymbol{\sigma}(\xi) \, d\xi, \quad \forall j \in \Gamma_D \quad ; \quad \lambda_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \lambda(\xi) \, d\xi, \quad \forall j \in \Gamma_N. \quad (5.43)$$

Notons que quand  $\Gamma_D = \emptyset$ , alors le système (5.40) se réduit au système (5.12)-(5.13)-(5.20) quand  $\Omega$  est simplement connexe (si  $\Omega$  est non-simplement connexe, il est nécessaire d'ajouter les deux équations de (5.20) correspondant aux  $Q$  trous), tandis que quand  $\Gamma_N = \emptyset$ , alors le système (5.40) se réduit au système (5.30).

**Proposition 5.6** *Le système (5.40) a une unique solution.*

**Preuve** On dénombre  $2J$  inconnues pour la vitesse  $\mathbf{u}$ ,  $I + K + J^{\Gamma_N}$  pour la pression  $p$  et  $I + K + J^{\Gamma_N}$  inconnues pour la vortacité  $\omega$ . Le système présente en tout  $2J + 2(I + K) + 2J^{\Gamma_N}$  inconnues. D'autre part, en additionnant (dans l'ordre) le nombre d'équations de (5.40a) à (5.40g), nous trouvons  $2(J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}) + (I + K) + (I + K - K^{\Gamma_N}) + (2J^{\Gamma_D}) + (J^{\Gamma_N}) + (J^{\Gamma_N} + K^{\Gamma_N}) + 2$  équations, soit en regroupant  $2J + 2(I + K) + 2J^{\Gamma_N} + 2$  équations. D'autre part, par définition des opérateurs, nous avons les relations suivantes :

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k = \sum_{j \in \Gamma} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j,$$

qui se réécrit grâce aux équations (5.40b), (5.40d) et (5.40e) :

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| g_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| g_k^P = \sum_{j \in \Gamma_D} |A_j| \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n}_j + \sum_{j \in \Gamma_N} |A_j| \lambda_j,$$

et cette relation est bien vérifiée grâce à (5.42) et (5.43). On dénombre donc autant d'équations que d'inconnues. Il reste à montrer l'injectivité. Posons pour cela,  $\mathbf{s}_j = 0$ ,  $g_{i,k}^{T,P} = 0$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_j = 0$ ,  $\lambda_j = 0$  et  $\omega_d = 0$ . D'après (5.40a) et  $\mathbf{s}_j = 0$ ,  $\forall j \in [1, J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}]$ , nous avons l'équation suivante :

$$[(\nabla_h^D \times \omega)_j + (\nabla_h^D p)_j] \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}]. \quad (5.44)$$

De plus, (5.44) reste vrai pour  $j \in \Gamma_D$  car  $\mathbf{u}_j = 0$  d'après (5.40d). Finalement, (5.44) est vrai pour tout  $j \in [1, J]$ . Ensuite, en multipliant (5.44) par  $|D_j|$  et en sommant sur les  $j \in [1, J]$ , on obtient :

$$(\nabla_h^D \times \omega, \mathbf{u})_D + (\nabla p, \mathbf{u})_D = 0. \quad (5.45)$$

En appliquant les formules de Green (2.13) et (2.14), la ligne précédente se réécrit

$$(\omega, \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{T,P} - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, \omega)_{\Gamma,h} - (p, \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{T,P} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p)_{\Gamma,h} = 0.$$

Puisque  $\mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j = 0$ ,  $\forall j \in \Gamma_D$  d'après (5.40d), et puisque  $\omega = 0$  d'après (5.40f) sur  $\Gamma_N$ , alors

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}, \omega)_{\Gamma_h} = \sum_{j \in \Gamma_D} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \frac{(\omega_{k_2}^P + \omega_{i_2}^T + \omega_{k_1}^P)}{4} + \sum_{j \in \Gamma_N} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \boldsymbol{\tau}_j \frac{(\omega_{k_2}^P + \omega_{i_2}^T + \omega_{k_1}^P)}{4} = 0.$$

D'autre part, comme  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$ ,  $\forall j \in [1, J]$  d'après (5.40d) et (5.40e), alors  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p)_{\Gamma,h} = 0$ .

Par ailleurs, (5.40b) avec  $g_{i,k}^{T,P} = 0$  implique  $(p, \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{T,P} = 0$ . Il reste donc

$$\begin{aligned} 0 = (\omega, \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{T,P} &= \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \omega_i^T (\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i \\ &+ \sum_{k \notin K^{\Gamma_N}} |P_k| \omega_k^P (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k \\ &+ \sum_{k \in K^{\Gamma_N}} |P_k| \omega_k^P (\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k. \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in K^{\Gamma_N}$ ,  $\omega_k^P = 0$  d'après (5.40f), et pour tout  $k \notin K^{\Gamma_N}$  et pour tout  $i \in [1, I]$ ,  $(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k} = \omega_{i,k}^{T,P}$  d'après (5.40c), d'où

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| [(\nabla_h^T \times \mathbf{u})_i]^2 + \sum_{k \notin K^{\Gamma_N}} |P_k| [(\nabla_h^P \times \mathbf{u})_k]^2 = 0,$$

ce qui, implique en particulier  $(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k} = 0$ ,  $\forall i \in [1, I], \forall k \notin K^{\Gamma_N}$ . Sachant de plus que  $(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = 0$ ,  $\forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K]$  et  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$ ,  $\forall j \in \Gamma$ , nous obtenons un problème Div-Rot homogène et il résulte du chapitre 3 que

$$\mathbf{u}_j = 0, \forall j \in [1, J].$$

Ainsi,  $\omega = 0$  partout d'après (5.40c) et (5.40f), d'où, en repartant de l'équation (5.40a), on en déduit que

$$(\nabla_h^D p)_j = 0, \forall j \in [1, J - J^\Gamma + J^{\Gamma_N}].$$

En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 5.3 à partir de l'hypothèse 5.2, on en déduit que

$$p_i^T = 0, \forall i \in [1, I + J^{\Gamma_N}] \text{ et } p_k^P = 0, \forall k \in [1, K].$$

□

### 5.3 Résultats numériques

Dans la section 5.3.1, puis dans la première partie de la section 5.3.2 et dans la section 5.3.3, nous testons la méthode de volumes finis, appliquée à la formulation tourbillon-vitesse-pression, puis à la formulation vitesse-pression et enfin à la formulation avec des conditions mixtes respectivement, sur des solutions analytiques  $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$  connues et nous traçons les courbes de convergence à l'échelle logarithmique pour différentes quantités. Trois familles de maillages dont le raffinement augmente sont utilisées. La première famille est une famille standard de maillages triangulaires, voir Fig. 5.1(a). La deuxième famille possède des non-conformités très localisées, voir Fig. 5.2(a), et est construite de la manière suivante : le premier maillage est obtenu en divisant le domaine en  $8 \times 8$  carrés identiques, et les quatre carrés au centre du maillage sont en plus raffinés en  $4 \times 4$  sous-carrés. Ensuite, les maillages suivants sont obtenus en divisant chaque cellule du maillage précédent en  $2 \times 2$  cellules carrées. La troisième famille possède des non-conformités sur l'ensemble du domaine, voir Fig. 5.3(a), puisqu'une cellule sur deux est raffinée en  $4 \times 4$  sous-cellules. Bien sûr, cette troisième famille n'est pas d'une grande utilité pratique mais elle illustre bien l'habilité du schéma à traiter des maillages fortement non-conformes. Notons que les cellules frontières des maillages des deuxième et

troisième familles doivent systématiquement être subdivisées afin de vérifier l'Hyp. 5.1 dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet sur  $\mathbf{u}$ , voir Fig. 5.5(a) et 5.6(a).

En ce qui concerne la formulation tourbillon-vitesse-pressure avec des conditions aux limites non-standard, nous avons prouvé (voir Prop. 5.1) que  $p$  et  $\omega$  sont solutions de deux équations de Laplace, pour lesquelles il a été montré dans [40] que la présente méthode de volumes finis converge pour l'inconnue, ainsi que pour son gradient. Nous nous sommes ainsi intéressés ici à la convergence de  $p$ ,  $\nabla p$ ,  $\omega$  et  $\nabla \omega$ , que nous avons mesurée en calculant les erreurs suivantes

$$(e0p)^2(h) := \frac{\frac{1}{2} (\sum_i |T_i| (p_i^T - (\Pi\hat{p})_i^T)^2 + \sum_k |P_k| (p_k^P - (\Pi\hat{p})_k^P)^2)}{\frac{1}{2} (\sum_i |T_i| ((\Pi\hat{p})_i^T)^2 + \sum_k |P_k| ((\Pi\hat{p})_k^P)^2)},$$

où  $\forall i \in [1, I]$ ,  $(\Pi\hat{p})_i^T = \hat{p}(G_i)$  et  $\forall k \in [1, K]$ ,  $(\Pi\hat{p})_k^P = \hat{p}(S_k)$ , et

$$(e1p)^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |(\nabla_h^D p)_j - (\Pi\nabla\hat{p})_j|^2}{\sum_j |D_j| |(\Pi\nabla\hat{p})_j|^2},$$

où  $\forall j \in [1, J]$ ,  $(\Pi\nabla\hat{p})_j = (\nabla\hat{p})(B_j)$ , où  $B_j$  est le centre de gravité de la cellule-diamant  $D_j$ . Les mêmes définitions sont utilisées pour  $\omega$  en remplaçant  $p$  par  $\omega$  dans les formules précédentes. A partir des résultats numériques donnés dans [40], on peut s'attendre à une précision du second ordre pour  $p$  et  $\omega$  (bien qu'on ne prouve dans le chapitre 3 que la précision d'ordre 1 pour l'instant), et à une précision d'ordre 1 pour  $\nabla p$  et  $\nabla \omega$  sur des maillages généraux. Cependant, sur les cellules-diamants qui sont presque toutes des parallélogrammes, ce qui est le cas pour la seconde famille de maillages, on s'attend à un ordre de convergence de 1.5 pour  $\nabla p$  et  $\nabla \omega$ . De la même manière, puisque la décomposition de Hodge discrète de  $\mathbf{u}$  conduit à la résolution de deux équations de Laplace (voir Prop. 5.2), on s'attend à un ordre de convergence de 1 pour  $\mathbf{u}$  sur les première et troisième familles de maillages et au moins à un ordre de 1.5 sur la seconde famille de maillages. L'erreur discrète relative  $L^2$  sur les cellules-diamants pour la vitesse est mesurée par la formule suivante :

$$e^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |\mathbf{u}_j - (\Pi\hat{\mathbf{u}})_j|^2}{\sum_j |D_j| |(\Pi\hat{\mathbf{u}})_j|^2},$$

où  $(\Pi\hat{\mathbf{u}})_j$  est la valeur de la solution analytique  $\hat{\mathbf{u}}$  au milieu de l'arête  $A_j$  (noté  $M_j$ ) :

$$\forall j \in [1, J], (\Pi\hat{\mathbf{u}})_j = \hat{\mathbf{u}}(M_j).$$

Dans les méthodes d'éléments finis, on s'intéresse aussi à la convergence de  $\nabla \mathbf{u}$ , puisque  $\mathbf{u}$  appartient à  $H^1(\Omega)$  et puisque le terme  $\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$  apparaît dans la forme bilinéaire

associée à la formulation variationnelle du problème de Stokes. Dans notre formulation, nous avons utilisé la formule (5.8), si bien que la norme naturelle induite par la formulation est  $\left(\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$ . Puisque  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  est toujours exactement imposé par la première équation de (5.20) ou (5.21) ou par (5.30b), nous mesurons les erreurs des dérivées de  $\mathbf{u}$  grâce à l'erreur de  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ .

En ce qui concerne la formulation vitesse-pression avec les conditions au bord standard de Dirichlet pour  $\mathbf{u}$ , nous n'avons pas encore établi d'analyse numérique, c'est pourquoi les ordres de convergence obtenus numériquement dans la première partie de la section 5.3.2 sont des résultats importants de ce présent travail, qui nous donnent une idée de la précision de la méthode. La dernière partie de la section 5.3.2 est consacrée à l'application de la méthode à des cas-tests usuels, tels que la cavité rectangulaire à paroi défilante, ou encore à un cas moins usuel tel que la cavité circulaire à paroi défilante dont la solution est singulière. Enfin, dans la section 5.3.3, nous donnons quelques résultats de convergence pour la formulation avec des conditions aux limites mixtes.

### 5.3.1 Conditions aux limites non-standard et formulation tourbillon-vitesse-pression

Ici, nous illustrons la section 5.2.1 basée sur la décomposition de Hodge de  $\mathbf{u}$  avec des conditions au bord données par  $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} = \sigma$ ,  $\int_{\Omega} \hat{p} = 0$  et  $\hat{\omega} = \omega_d$ . Le domaine de calcul est  $\Omega = ]-1/2; 1/2[^2$  et les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que la solution exacte est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) \\ x \sin(\pi y) + \cos(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p} = xy \exp(x) \cos(\pi y) . \quad (5.46)$$

#### Maillages triangulaires

Considérons tout d'abord des maillages triangulaires standard, comme illustré sur la Fig. 5.1(a). Sur ce type de maillages,  $\mathbf{u}$ ,  $\nabla p$  et  $\nabla \omega$  sont tous précis à l'ordre un, tandis que  $p$  et  $\omega$  sont précis à l'ordre deux, et sont représentés respectivement sur la Fig. 5.1(b), (d), (f) et (c) et (e). On obtient bien les ordres de convergence auxquels on s'attendait ci-dessus.

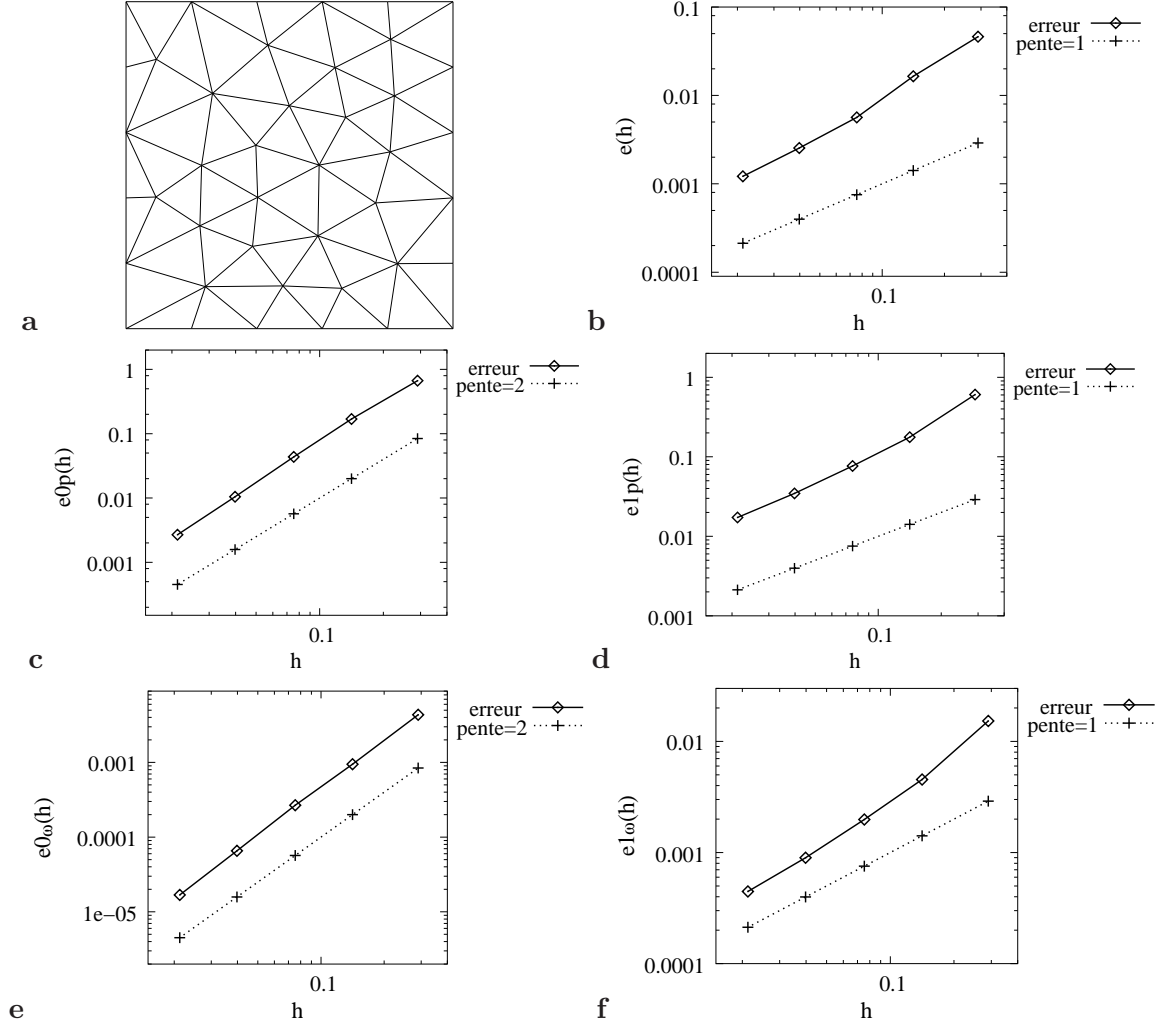


FIG. 5.1 – (a) Maillage triangulaire. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur sur le gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4).



### Maillages non-conformes

Sur la seconde famille de maillages (voir Fig. 5.2), nous observons une super-convergence d'ordre 1.5 pour  $\nabla p$  et  $\nabla \omega$ , ce à quoi on s'attendait. De plus, en ce qui concerne  $\mathbf{u}$ , nous observons en pratique un ordre de convergence meilleur que celui que l'on attendait puisqu'il vaut un peu moins de 2.

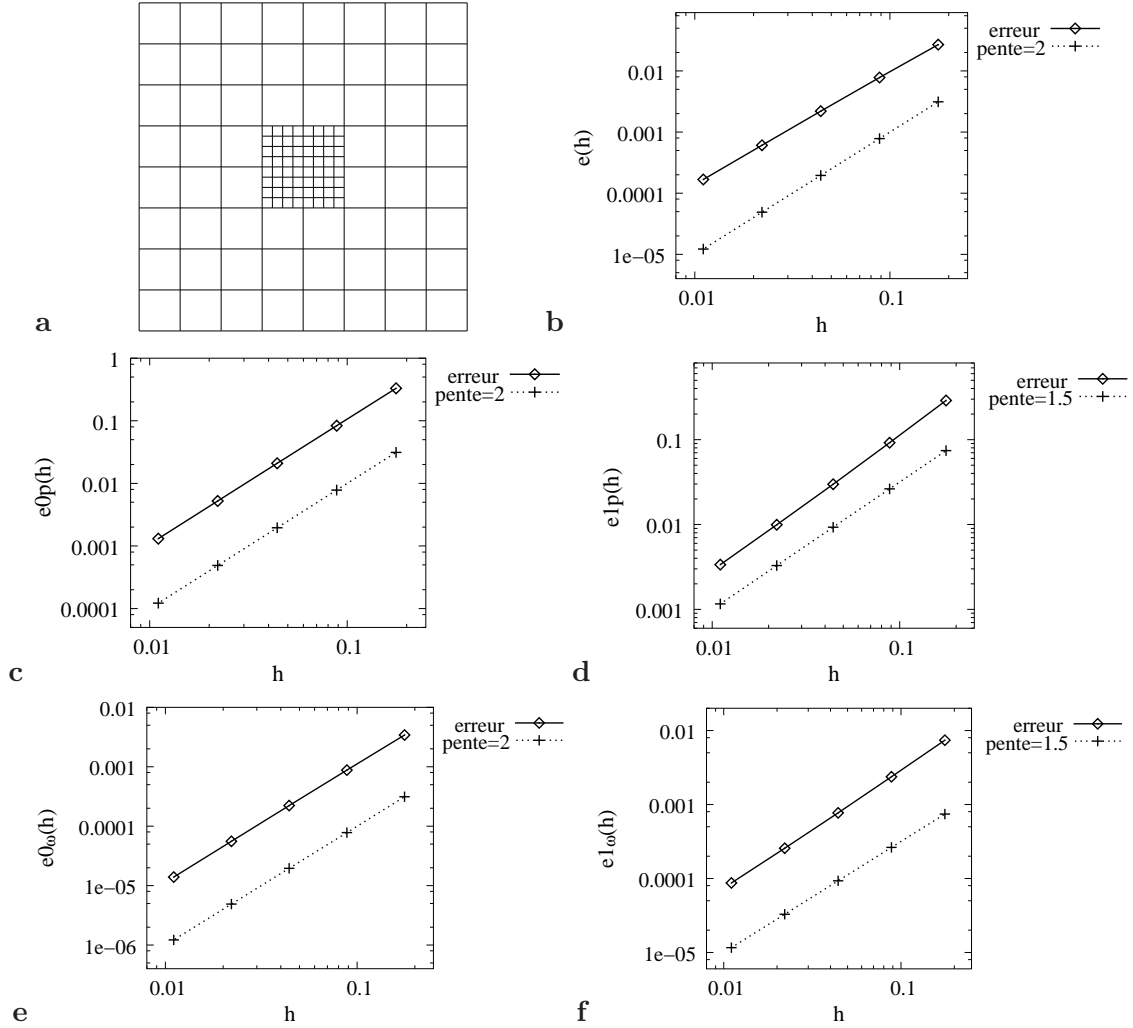


FIG. 5.2 – (a) Maillage non-conforme. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur sur le gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4).

Sur la troisième famille de maillages, voir Fig. 5.3, nous observons les mêmes ordres de convergence que ceux obtenus sur les maillages triangulaires, comme nous nous y attendions.

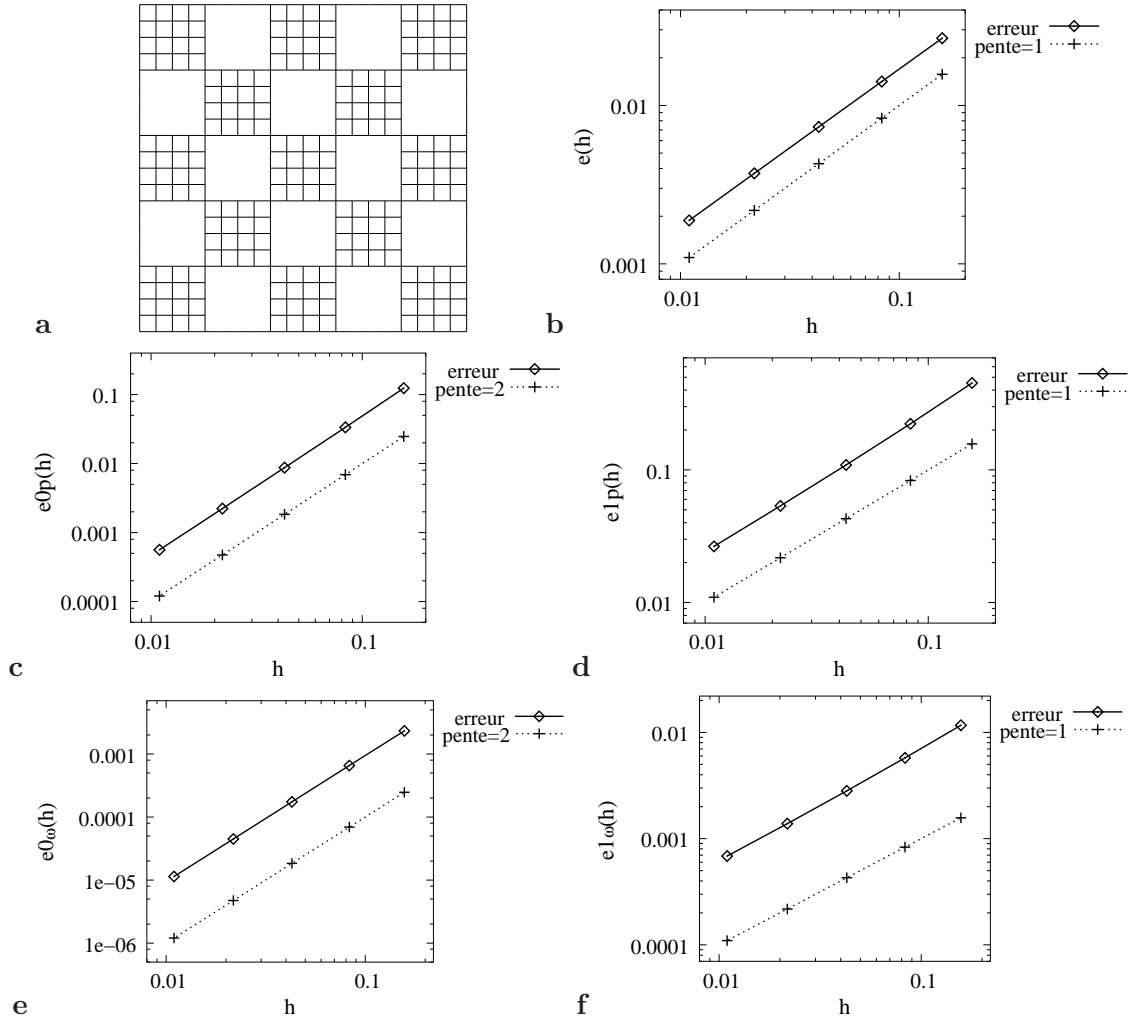


FIG. 5.3 – (a) Maillage non-conforme. (b) Erreur sur la vitesse. (c) Erreur sur la pression. (d) Erreur du gradient de pression. (e) Erreur sur la vorticité. (f) Erreur sur le gradient de vorticité pour la solution (5.46) avec la condition aux limites non-standard (5.4).

### 5.3.2 Conditions aux limites standard et formulation vitesse-pression

Maintenant, nous illustrons la section 5.2.2 avec des conditions de Dirichlet sur  $\mathbf{u}$ . Le domaine de calcul est  $\Omega_1 = ]0, 1[^2$  ou  $\Omega_2 = ]-1/2; 1/2[^2$  et les données et conditions aux

limites sont choisies de telle sorte que la solution exacte est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) \\ x \sin(\pi y) + \cos(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_1 = xy \exp(x) \cos(\pi y) \quad (5.47)$$

ou

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -2000y(y-1)(2y-1)x^2(x-1)^2 \\ 2000x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_2 = 100 (x^2 + y^2) + c, \quad (5.48)$$

où  $c$  est une constante choisie de telle sorte que  $\int_{\Omega} \hat{p}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ . Les deux premiers maillages de chacune des familles sont représentés sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6 où nous notons pour certains d'entre eux un raffinement des cellules primales situées au bord.

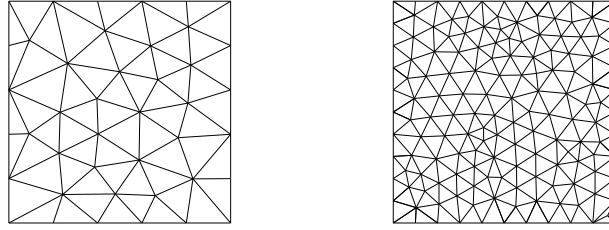


FIG. 5.4 – Maillages triangulaires non-structurés.

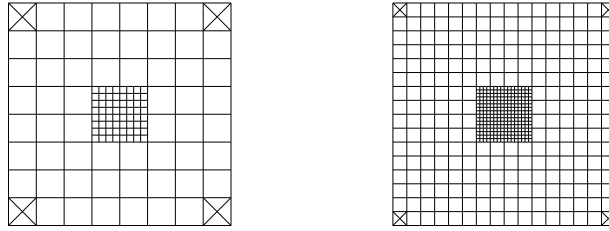


FIG. 5.5 – Maillages avec une non-conformité au centre.

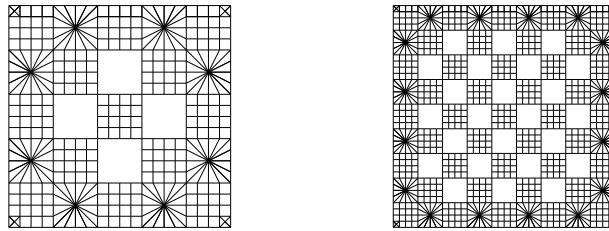


FIG. 5.6 – Maillages fortement non-conformes.

### Maillages triangulaires

Sur la famille de maillages triangulaires, l'ordre de convergence semble être 2 pour la vitesse et au moins 1 pour la pression et la vorticité, d'après la Fig. 5.7. Ce sont les mêmes ordres (voire mieux) que ceux obtenus par les méthodes d'éléments finis standard de faible ordre telles que [32].

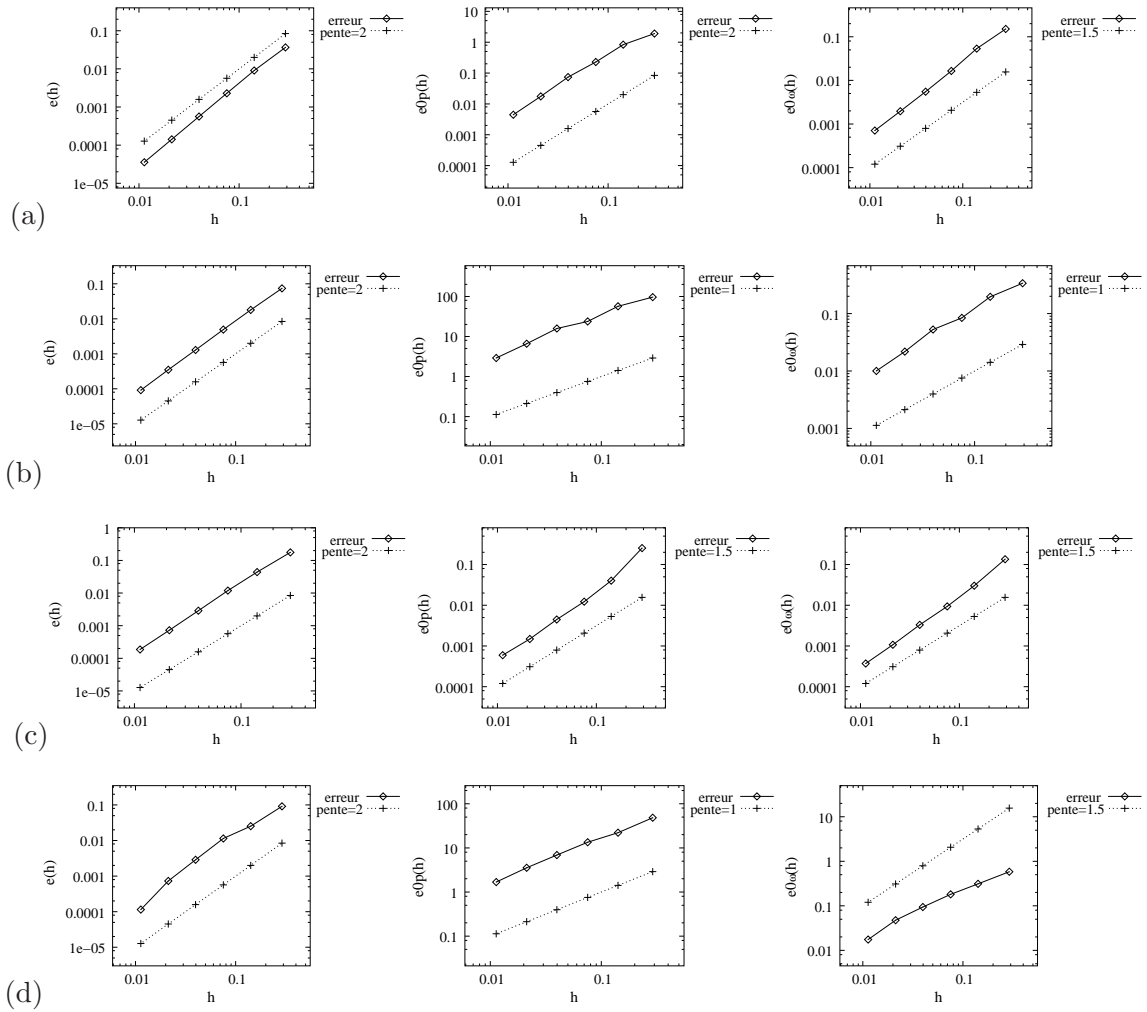


FIG. 5.7 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non structurés (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

### Maillages non-conformes

Sur la famille de maillages avec une non-conformité au centre, nous obtenons, d'après la Fig. 5.8, au moins de l'ordre 1.5 pour la vitesse et au moins de l'ordre 1 pour la pression et pour la vorticité.

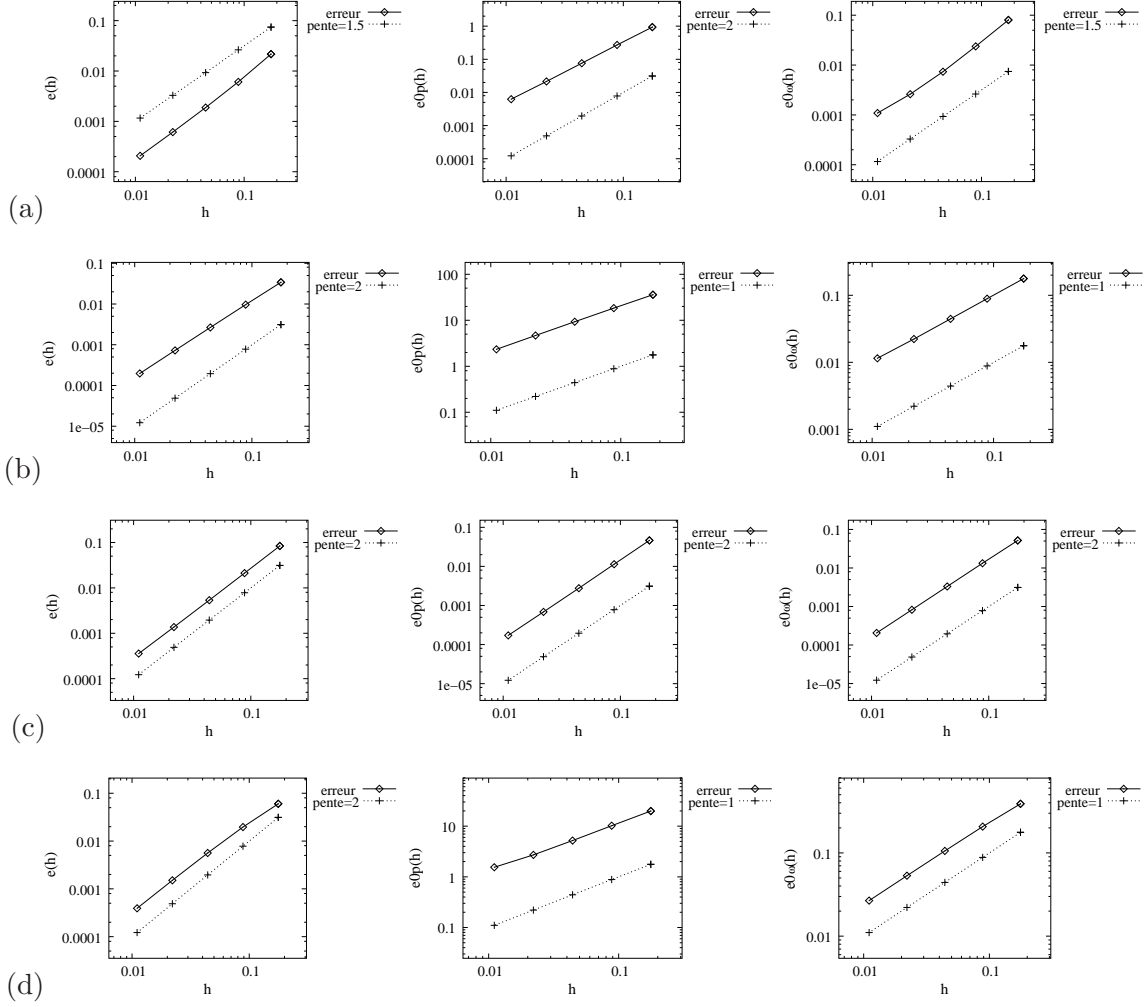


FIG. 5.8 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages localement non-conformes (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

Sur la famille de maillages fortement non-conformes, il semble, d'après la Fig. 5.9, qu'on ait une perte en précision, puisque nous observons un ordre 1 pour la vitesse et un ordre de 0.5 pour la pression et la vorticité dans tous les cas.

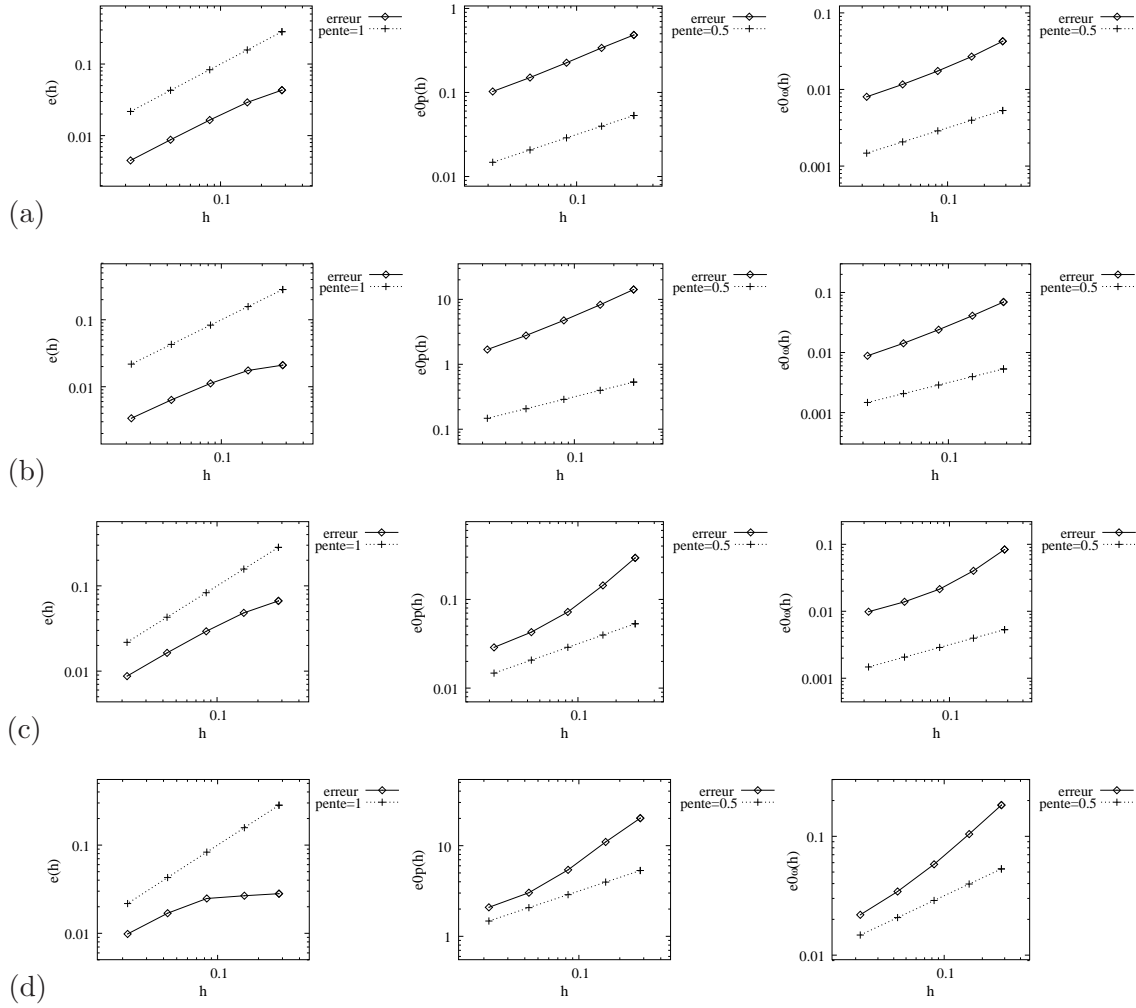


FIG. 5.9 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non-conformes (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

### Cavité rectangulaire

Nous considérons un écoulement de Stokes dans une cavité rectangulaire à paroi défilante de profondeur  $D$  ( $\Omega = [0; 1] \times [0; D]$ ), dont le haut se déplace avec une vitesse unitaire ( $u = 1, v = 0$ ), où  $u$  dénote la première composante selon l'axe horizontal  $x$  et  $v$  la seconde composante selon l'axe vertical  $y$  de la vitesse  $\mathbf{u} = (u, v)$ . Une condition aux limites de non-glissement ( $u = v = 0$ ) est appliquée sur toutes les parois statiques et nous supposons de plus que  $\mathbf{f} = \mathbf{g} = 0$ .

**Profils et lignes de niveaux de la solution** D'abord, nous choisissons  $D = 1$ . Les figures 5.10(a) et 5.10(b) montrent respectivement le profil de  $u$  en fonction de  $y$  en  $x = 0.5$  et le profil de  $v$  en fonction de  $x$  en  $y = 0.5$ . Ces deux profils coïncident bien avec ceux obtenus par exemple par [109]. De plus, nous étudions l'effet du pas du maillage dans la précision numérique en testant la méthode sur deux maillages triangulaires non-structurés ayant  $N = 20$  et  $N = 160$  points respectivement le long des segments d'équations  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$ , et nous remarquons que le maillage grossier donne déjà une bonne approximation. Nous montrons ensuite sur la figure 5.11 le champ de vecteurs vitesse  $\mathbf{u}$  et les lignes de niveaux de la pression  $p$ , de la vorticité  $\omega$  et de la fonction de courant  $\psi$ . Plus précisément, nous avons tracé 10 lignes de niveaux uniformément réparties entre la valeur minimale et la valeur maximale pour la fonction de courant  $\psi$ . D'autre part, en ce qui concerne la vorticité  $\omega$  (resp. la pression  $p$ ), nous avons tracé 250 lignes de niveaux uniformément réparties entre les valeurs  $-125$  et  $125$  (resp.  $-100$  et  $100$ ). Les résultats sont en accord avec [110, 111].

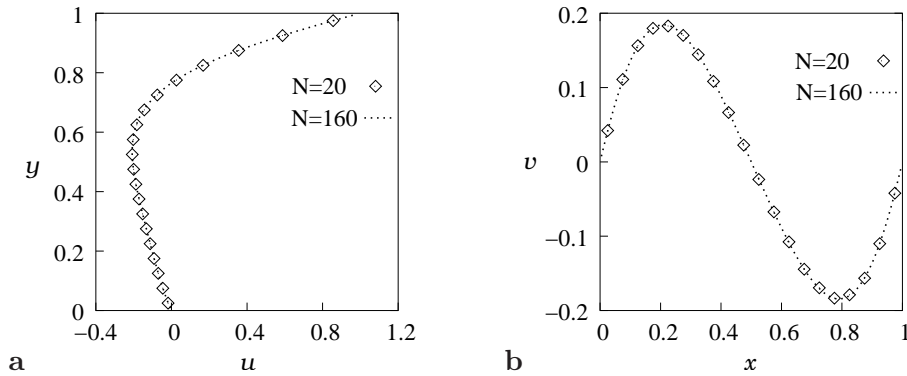


FIG. 5.10 – (a) Profil de vitesse horizontale selon  $y$  en  $x = 0.5$ . (b) Profil de vitesse vertical selon  $x$  en  $y = 0.5$ .

**Localisations des tourbillons** Maintenant, nous étudions l'effet de la profondeur  $D$  de la cavité sur le nombre de tourbillons. Selon Shankar [102], on dénombre 1, 2, 3 et 4 tourbillons centraux, respectivement, dans les cas suivants :  $D \leq 1.6$ ,  $D \in [1.7; 3.0]$ ,  $D \in [3.1; 4.4]$  et  $D \in [4.5; 5.8]$ . Nous comparons les localisations  $D - y$  (c'est à dire la profondeur) des centres des principaux tourbillons, ainsi que les valeurs de la fonction de courant  $\psi$  (nulle au bord) au centre des tourbillons, calculées par la méthode DDFV et par Shankar [102] dans la table 5.1. On peut noter que Shankar [102] donne seulement les valeurs absolues de  $\psi$  au centre des

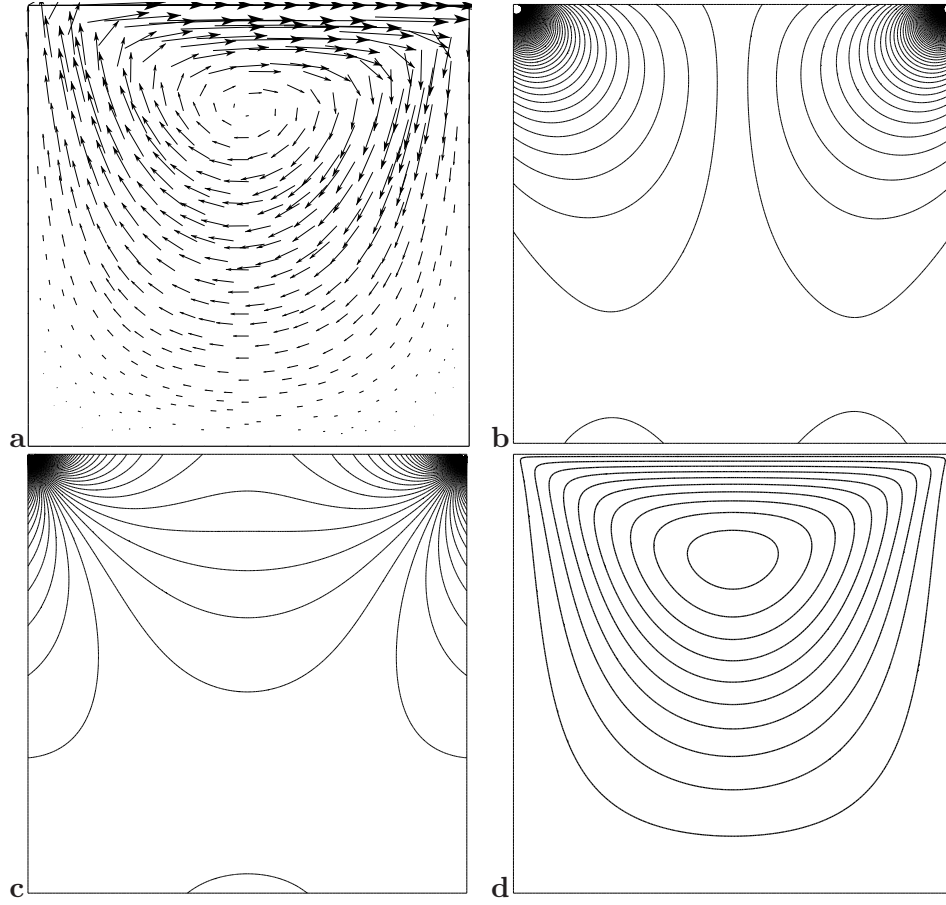


FIG. 5.11 – (a) Vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ . (b) Lignes de niveaux de la pression  $p$ . (c) Lignes de niveaux de la vorticité  $\omega$ . (d) Lignes de niveaux de la fonction de courant  $\psi$  pour une cavité carrée unitaire.

tourbillons. Les localisations que nous avons calculées sont très proches aussi de celles données par Pan et Acrivos dans [90]. Notons que les localisations sont données avec une erreur de l'ordre de  $\pm h$ , où  $h$  est le pas du maillage ( $h \approx 5.8 \times 10^{-3}$  pour  $D = 0.25$ ;  $h \approx 1.8 \times 10^{-2}$  pour  $D = 0.5$ ;  $h \approx 1.1 \times 10^{-2}$  pour  $D = 1.$ ;  $h \approx 2.6 \times 10^{-2}$  pour  $D = 2.$ ;  $h \approx 3.6 \times 10^{-2}$  pour  $D = 5.$ ). Remarquons que pour  $D = 5.0$ , la valeur absolue obtenue avec DDFV pour le 3 me tourbillon n'est pas la même que celle obtenue par Shankar. Cependant, on constate que l'amplitude de  $\psi$ , en valeur absolue, donnée par Shankar est divisée par 332 (331 pour DDFV) entre le 1er et le 2 me tourbillon, 3,6 (355 pour DDFV) entre le 2 me et le 3 me tourbillon, puis par 37902 (376 pour DDFV) entre le 3 me tourbillon et le 4 me. Les rapports



obtenus avec DDFV sont proches les uns des autres. Il est donc probable que la valeur donnée par Shankar soit erronée.

Ensuite, nous montrons la formation d'un tourbillon au centre sur la figure 5.12 lorsque

TAB. 5.1 – Localisations des centres des tourbillons et valeurs de la fonction de courant  $\psi$  obtenues par Shankar [102] et par la méthode DDFV pour différentes profondeurs.

Profondeur	Méthode	1er tourbillon	2ème tourbillon	3ème tourbillon	4ème tourbillon
0.25	<i>Shankar</i>	$ \psi  = 0.0371$ $D - y = 0.0834$			
	<i>DDFV</i>	$\psi = -0.0371$ $D - y = 0.0839$			
0.5	<i>Shankar</i>	$ \psi  = 0.0731$ $D - y = 0.165$			
	<i>DDFV</i>	$\psi = -0.0731$ $D - y = 0.163$			
1.0	<i>Shankar</i>	$ \psi  = 0.1$ $D - y = 0.24$			
	<i>DDFV</i>	$\psi = -0.1$ $D - y = 0.238$			
2.0	<i>Shankar</i>	$ \psi  = 0.101$ $D - y = 0.24$	$\psi = 2.26 \times 10^{-4}$ $D - y = 1.58$		
	<i>DDFV</i>	$\psi = -0.101$ $D - y = 0.24$	$\psi = 2.27 \times 10^{-4}$ $D - y = 1.58$		
5.0	<i>Shankar</i>	$ \psi  = 0.101$ $D - y = 0.24$	$ \psi  = 3.04 \times 10^{-4}$ $D - y = 1.61$	$ \psi  = 8.49 \times 10^{-5}$ $D - y = 3.01$	$ \psi  = 2.24 \times 10^{-9}$ $D - y = 4.39$
	<i>DDFV</i>	$\psi = -0.101$ $D - y = 0.24$	$\psi = 3.05 \times 10^{-4}$ $D - y = 1.62$	$\psi = -8.59 \times 10^{-7}$ $D - y = 3.$	$\psi = 2.28 \times 10^{-9}$ $D - y = 4.33$

la profondeur varie de 1.6 à 1.9. Pour une profondeur égale à  $D = 1.6$ , nous voyons clairement deux tourbillons primaires de coins. Lorsque la profondeur est égale à  $D = 1.7$ , nous

remarquons que les deux tourbillons de coins se rapprochent et pour une profondeur égale à  $D = 1.8$ , nous observons un nouveau tourbillon au centre. Cette évolution est en accord avec [102]. Dans la table 5.2, les localisations des tourbillons du coin en bas à gauche pour des profondeurs égales à 1.0, 1.6, 1.64 et 1.7, sont calculées sur des maillages non-structurés, et on compare les valeurs de la fonction de courant avec celles données par Shankar [102]. De nouveau, les localisations sont données avec une erreur de l'ordre de  $\pm h$  ( $h \approx 1.1 \times 10^{-2}$  pour  $D = 1.$  et  $h \approx 1.7 \times 10^{-2}$  pour  $D = 1.6, D = 1.64$  et  $D = 1.7$ ).

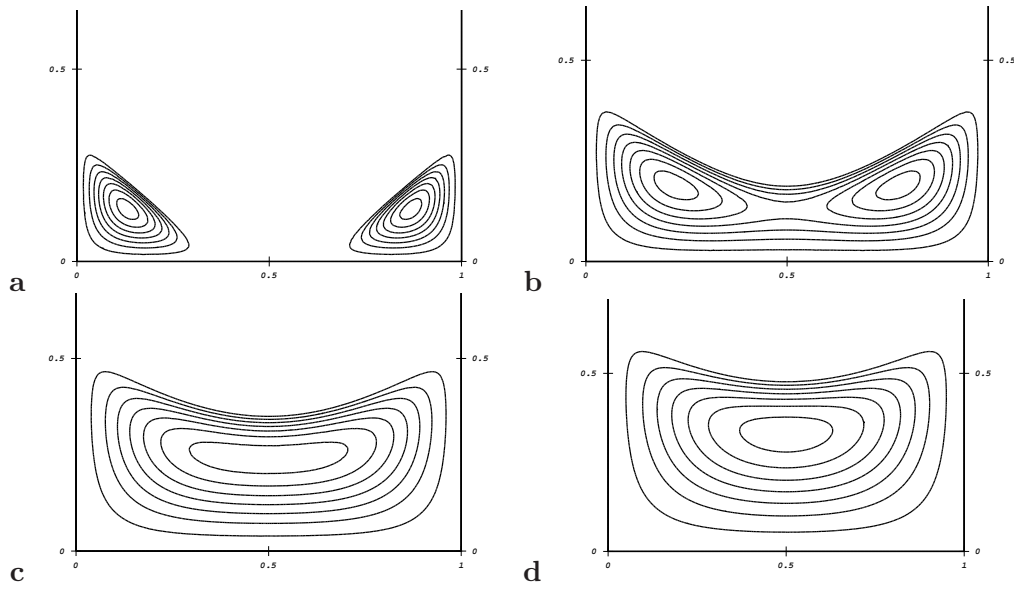


FIG. 5.12 – Évolution de la fonction de courant  $\psi$  concernant les tourbillons de coins pour (a)  $D = 1.6$ , (b)  $D = 1.7$ , (c)  $D = 1.8$  et (d)  $D = 1.9$ .

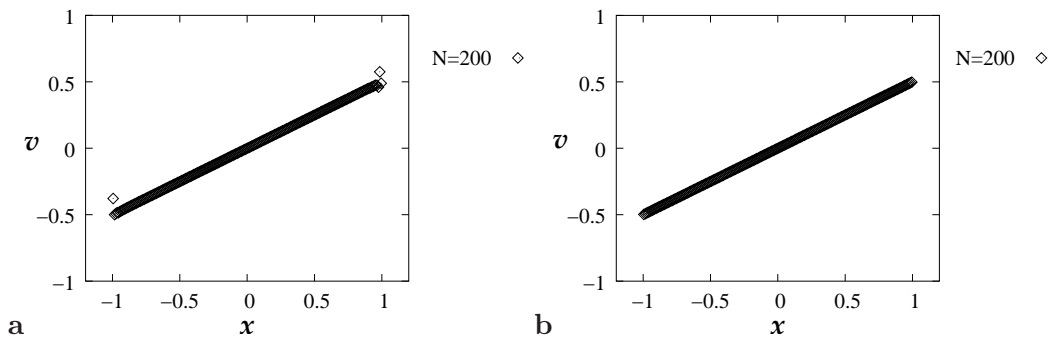
### Cavité circulaire

Le second problème modèle consiste en un écoulement recirculant dans une cavité circulaire. Le rayon de la cavité circulaire est supposé être unitaire. Sur la demi-frontière supérieure, on impose la vitesse orthoradiale  $u_\theta = 1$  et la vitesse radiale  $u_r = 0$ , et sur la demi-frontière inférieure,  $u_\theta = u_r = 0$ . Notons que puisque le champ de vecteurs  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  est défini sur les cellules-diamants, il n'y a pas de problème de définition de  $\mathbf{u}$  aux points singuliers  $(-1, 0)$  et  $(1, 0)$ .

TAB. 5.2 – Localisations des tourbillons primaires de coins et valeurs de la fonction de courant obtenues par Shankar [102] et par la méthode DDFV pour différentes profondeurs.

Profondeur	Méthode	$x$	$y$	$\psi$
1.0	<i>Shankar</i>	—	—	$2.23 \times 10^{-6}$
	<i>DDFV</i>	0.036	0.0422	$2.32 \times 10^{-6}$
1.6	<i>Shankar</i>	—	—	$9.62 \times 10^{-6}$
	<i>DDFV</i>	0.126	0.139	$9.72 \times 10^{-6}$
1.64	<i>Shankar</i>	—	—	$1.52 \times 10^{-5}$
	<i>DDFV</i>	0.16	0.16	$1.53 \times 10^{-5}$
1.7	<i>Shankar</i>	—	—	$3.07 \times 10^{-5}$
	<i>DDFV</i>	0.219	0.189	$3.08 \times 10^{-5}$

**Profils horizontal et vertical de la vitesse** Lorsque le maillage est arbitraire, en d’autres termes sans condition de symétrie, nous observons sur la figure 5.13(a) que le profil de  $v(x, y = 0)$  s’éloigne des valeurs attendues (qui sont  $\frac{1}{2}x$ ) près des singularités (voir [110]). Ce défaut disparaît lorsque l’on utilise un maillage non-structuré qui est symétrique par rapport à l’axe horizontal  $y = 0$ , comme illustré sur la figure 5.13(b). Ainsi, dans la suite, nous ferons les calculs sur des maillages non-structurés qui sont symétriques selon l’axe horizontal  $y = 0$ .


 FIG. 5.13 – (a) Profil de vitesse  $v(x, y = 0)$  pour un maillage non-structuré. (b) Profil de vitesse  $v(x, y = 0)$  pour un maillage symétrique selon l’axe  $y = 0$ .

La figure 5.14 montre le profil de  $u(x = 0, y)$  pour des maillages non-structurés avec  $N = 16$  et  $N = 200$  points le long de  $x = 0$ , ainsi que la solution exacte. On note que le calcul

sur le maillage grossier donne déjà une bonne approximation de ce profil.

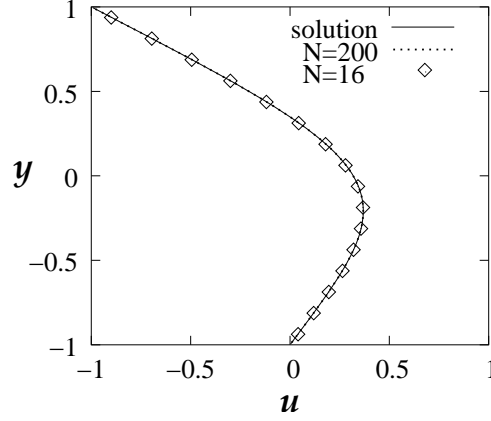


FIG. 5.14 – Comparaison des profils de vitesse  $u(x=0, y)$ .

**Lignes de niveaux associées à la solution** La figure 5.15 montre le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et les lignes de niveaux de la pression  $p$ , de la vorticité  $\omega$  et de la fonction de courant  $\psi$  pour un maillage qui est symétrique par rapport à l'axe horizontal  $y = 0$ . Plus précisément, nous avons représenté 10 (resp. 250) lignes de niveaux uniformément réparties entre les valeurs minimale et maximale pour la fonction de courant  $\psi$  (resp. la vorticité  $\omega$ ). D'autre part, en ce qui concerne la pression  $p$ , nous avons représenté 250 lignes de niveaux uniformément réparties entre  $-100$  et  $100$ . Cependant, nous notons que l'apparence du profil  $u(x=0, y)$  de la composante  $x$  de la vitesse et les lignes de niveaux de la pression  $p$ , de la vorticité  $w$  et de la fonction de courant  $\psi$  sont les mêmes lorsque le maillage est non-structuré sans condition de symétrie. Les résultats numériques sont en accord avec ceux donnés par [110].

### 5.3.3 Conditions aux limites mixtes

Ici, nous illustrons la section 5.2.3 avec les conditions mixtes  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}$  sur  $\Gamma_D$ , et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma$  et  $\nabla \times \mathbf{u} = \omega_d$  sur  $\Gamma_N$ . Le domaine de calcul est  $\Omega_1 = ]0, 1[^2$  (avec  $\Gamma_D = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0\})$  et  $\Gamma_N = (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ ) ou  $\Omega_2 = ]-1/2, 1/2[^2$  (avec  $\Gamma_D = (\{-1/2\} \times [-1/2, 1/2]) \cup ([-1/2, 1/2] \times \{-1/2\})$  et  $\Gamma_N = (\{1/2\} \times [-1/2, 1/2]) \cup ([-1/2, 1/2] \times \{1/2\})$ ), et les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que la solution

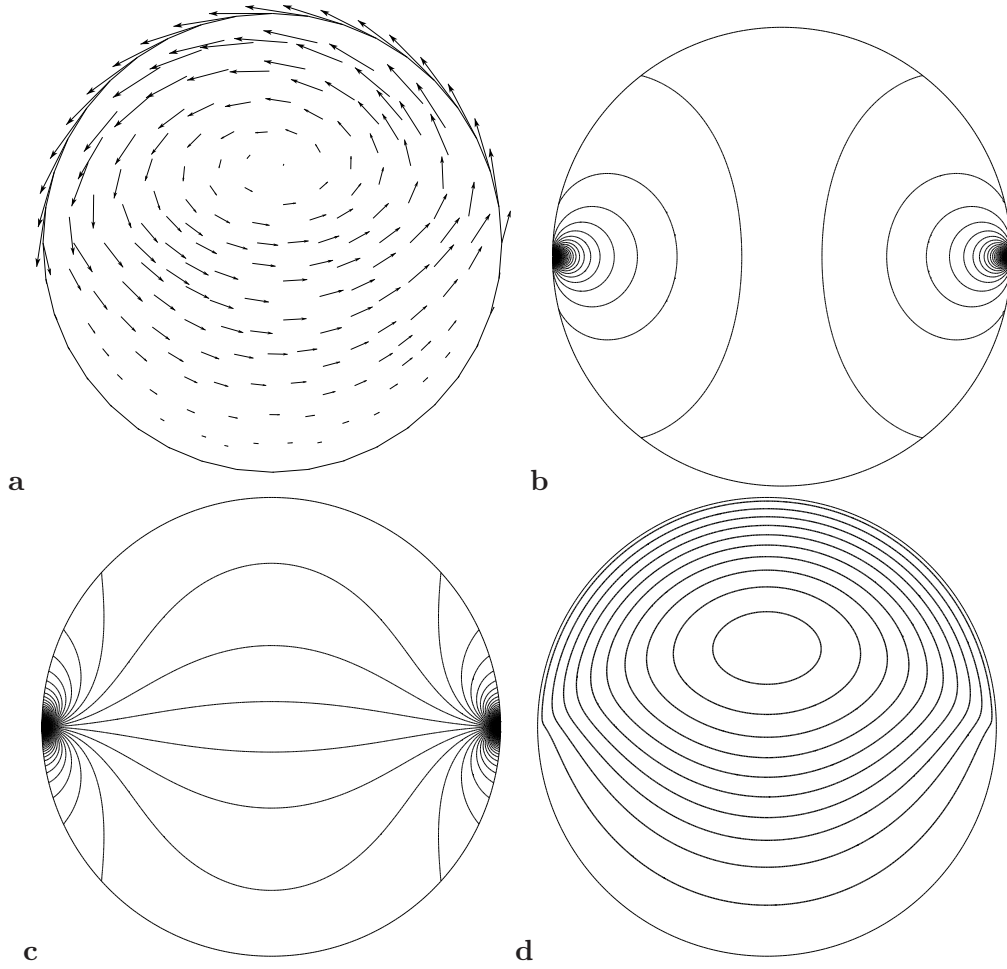


FIG. 5.15 – (a) Vecteur vitesse  $\mathbf{u}$ . (b) Lignes de niveaux de la pression  $p$ . (c) Lignes de niveaux de la vorticité  $\omega$ . (d) Lignes de niveaux de la fonction de courant  $\psi$  pour un maillage non-structuré qui est symétrique par rapport à l’axe horizontal  $y = 0$ .

exacte est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) \\ x \sin(\pi y) + \cos(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_1 = xy \exp(x) \cos(\pi y) \quad (5.49)$$

ou

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -2000y(y-1)(2y-1)x^2(x-1)^2 \\ 2000x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_2 = 100 (x^2 + y^2) + c, \quad (5.50)$$

où  $c$  est une constante choisie de telle sorte que  $\int_{\Omega} \widehat{p}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ . Les deux premiers maillages de chacune des familles sont les mêmes que ceux représentés sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6 sauf que nous n'avons raffiné que les cellules primales situées sur  $\Gamma_D$  afin de satisfaire l'hypothèse 5.2.

### Maillages triangulaires

Sur la famille de maillages triangulaires, l'ordre de convergence, d'après la Fig. 5.16, semble être 2 pour la vitesse et au moins 1 pour la pression et la vorticité.

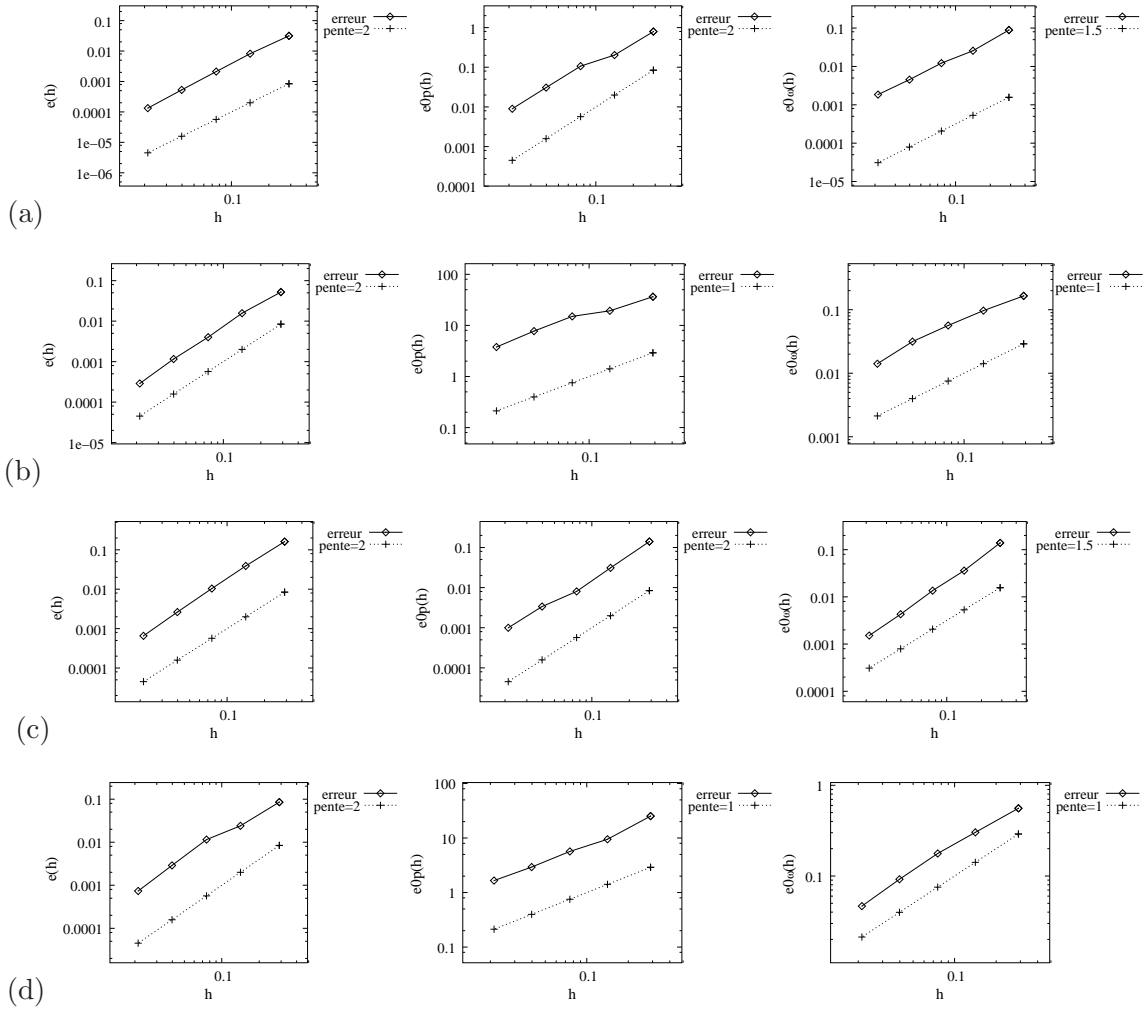


FIG. 5.16 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages non structurés (a)  $(\widehat{\mathbf{u}}_1, \widehat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\widehat{\mathbf{u}}_1, \widehat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\widehat{\mathbf{u}}_2, \widehat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\widehat{\mathbf{u}}_2, \widehat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

### Maillages non-conformes

Sur la famille de maillages avec une non-conformité au centre, nous obtenons, d'après la Fig. 5.17, au moins de l'ordre 1.5 pour la vitesse et au moins de l'ordre 1 pour la pression et pour la vorticité. Sur la famille de maillages fortement non-conformes, il semble, d'après la

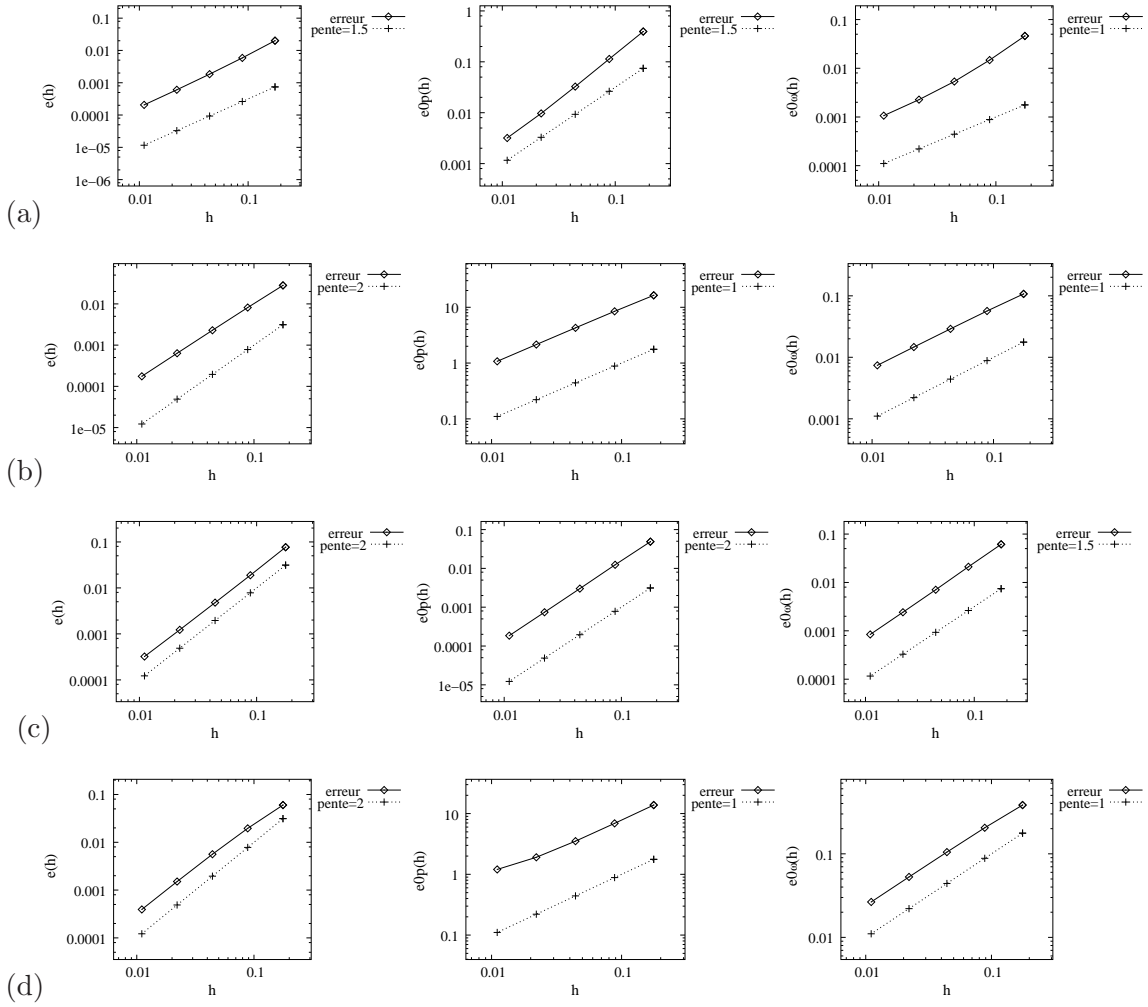


FIG. 5.17 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages avec une non-conformité au centre (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

Fig. 5.18, qu'on ait une perte en précision, puisque nous observons un ordre 1 pour la vitesse et un ordre de 0.5 pour la pression et la vorticité dans tous les cas.

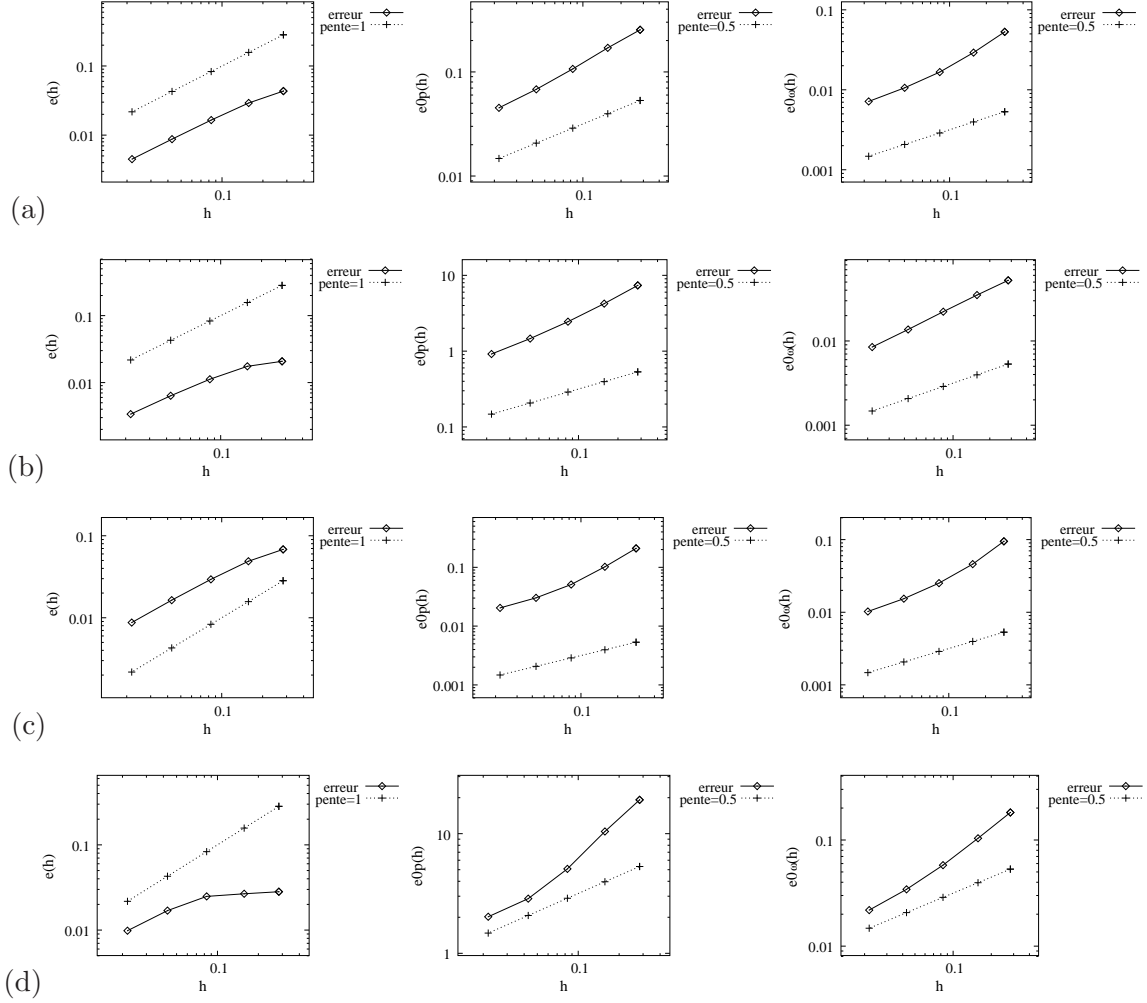


FIG. 5.18 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour des maillages fortement non-conformes (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

## 5.4 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de volumes finis pour les équations de Stokes avec des conditions aux limites standard et non-standard. Les conditions aux limites non-standard sont traitées par la formulation tourbillon-vitesse-pression des équations de Stokes, pour laquelle la méthode de volumes finis a été appliquée avec succès sur des maillages non-structurés et non-conformes. Les résultats numériques montrent un ordre de convergence de 1 pour la vitesse, le gradient de pression et le gradient de la vorticité, et un ordre de convergence de 2 pour



la pression et la vorticité, tandis qu'une super-convergence d'ordre 1.5 pour les gradients de pression et de vorticité et un ordre 2 pour la vitesse sont obtenus sur des maillages réguliers (avec un possible raffinement local). Ces ordres de convergence peuvent être expliqués (jusqu'à un certain point) par les résultats théoriques du chapitre 3 [40]. D'autre part, les conditions au bord standard de Dirichlet sur la vitesse sont traitées à travers la formulation vitesse-pression usuelle du problème de Stokes. Sur les maillages triangulaires ou sur les maillages réguliers localement non-conformes, la convergence numérique a été observée avec un ordre d'au moins 1 pour la pression et pour la vorticité, et un ordre 2 pour la vitesse. Sur les maillages fortement non-conformes, nous observons une perte de précision, même si le schéma converge encore. Des applications auxavit s rectangulaire et circulaire à paroi défilante ont été présentées ; elles conduisent à des résultats numériques qui sont en accord avec différents benchmarks. Enfin, pour les conditions aux limites mixtes, les ordres de convergence obtenus sont similaires à ceux obtenus pour les conditions au bord standard.

## Chapitre 6

# Le schéma dual pour Stokes

Ce chapitre s’inspire du rapport de stage de DEA de Lekbir Afraïtes [2] dans lequel il étudie un schéma dual pour le problème de Stokes. Lekbir Afraïtes et Pascal Omnes montrent que ce schéma dual admet une unique solution pour des maillages triangulaires conformes. Nous donnons ici les principaux résultats de ce rapport ainsi que des arguments supplémentaires liés à la fonction de courant et à la décomposition de Hodge qui nous ont incités à abandonner ce schéma. De plus, nous avons implémenté ce schéma et nous l’avons testé, en utilisant un Bicgstab, sur d’autres cas tests que ceux fournis dans [2] et obtenus avec un gradient conjugué. Nous vérifions également que le schéma dual admet une solution unique sur certains maillages quadrangulaires non-conformes, donc autres que des maillages triangulaires conformes, sans pour autant donner de principe d’existence et d’unicité dans le cas général. Ce chapitre est purement informatif et peut être vu comme une réflexion sur les raisons qui nous ont poussées, au cours de cette thèse, à préférer le schéma du chapitre 5.

### 6.1 Introduction

Dans le chapitre 5, nous avons choisi de discrétiser la vitesse sur les cellules-diamants, et la pression sur les cellules primales et duales. Par définition du principe de dualité discrète de la méthode DDFV, ce choix nous a conduit à intégrer l’équation  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$  sur les cellules-diamants. On pourrait se demander pourquoi nous n’avons pas choisi le schéma dual, c’est à dire de poser les inconnues de vitesse sur les cellules primales et duales, et les inconnues de pression sur les cellules diamants. Ainsi, on aurait discrétisé l’opérateur laplacien sur les cellules primales et duales, comme dans [40] et [36] (qui correspond au chapitre 3 de cette

thèse). Malheureusement, dans le cas du problème de Stokes, cette configuration présente, certes, de bonnes propriétés, mais elle apporte aussi de très gros inconvénients que nous allons expliquer dans ce chapitre et pour lesquels nous avons préféré opter pour le schéma décrit dans le chapitre 5.

Pour commencer, il est nécessaire d'introduire deux nouveaux opérateurs : l'opérateur gradient discret sur les cellules primales et duales, ainsi que l'opérateur divergence discrète sur les cellules-diamants.

On approche l'opérateur gradient d'un scalaire  $p$  défini par ses valeurs  $p_j$ ,  $\forall j \in [1, J]$  sur les cellules-diamants par l'opérateur gradient discret  $\nabla_h^{T,P}$  :

**Définition 6.1** *L'opérateur gradient discret  $\nabla_h^{T,P} := (\nabla_h^T, \nabla_h^P)$  est défini par ses valeurs sur les cellules primales  $T_i$  et les cellules duales  $P_k$  :*

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T p)_i &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| p_j \mathbf{n}_{ji}, \\ (\nabla_h^P p)_k &= \frac{1}{|P_k|} \left( \sum_{j \in \mathcal{E}(k)} \left( |A'_{j_1}| \mathbf{n}'_{jk_1} + |A'_{j_2}| \mathbf{n}'_{jk_2} \right) p_j + \sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J-J^\Gamma+1, J]} \frac{1}{2} |A_j| p_j \mathbf{n}_j \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

L'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$  d'un scalaire agit de  $\mathbb{R}^J$  dans  $(\mathbb{R}^I)^2 \times (\mathbb{R}^K)^2$ .

Ensuite, pour un champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  donné par ses valeurs  $(\mathbf{u}_i^T, \mathbf{u}_k^P)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ , nous écrivons la définition de la divergence discrète  $\nabla_h^D \cdot$  :

**Définition 6.2** *L'opérateur divergence discrète  $\nabla_h^D \cdot$  est défini par ses valeurs sur les cellules-diamants  $D_j$  :*

$$(\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_j := \frac{1}{2|D_j|} \left\{ [\mathbf{u}_{k_2}^P - \mathbf{u}_{k_1}^P] \cdot |A'_j| \mathbf{n}'_j + [\mathbf{u}_{i_2}^T - \mathbf{u}_{i_1}^T] \cdot |A_j| \mathbf{n}_j \right\}. \quad (6.2)$$

Cette définition de la divergence discrète sur les cellules-diamants ne nécessite que la connaissance des valeurs de  $\mathbf{u}$  aux noeuds du maillage primal et du maillage dual. L'opérateur  $\nabla_h^D \cdot$  agit donc de  $(\mathbb{R}^{I+J^\Gamma} \times \mathbb{R}^K)^2$  dans  $\mathbb{R}^J$ .

De plus, ces deux opérateurs sont adjoints par la formule de Green discrète :

$$(\nabla_h^D \cdot \mathbf{u}, p)_D = (\mathbf{u}, \nabla_h^{T,P} p)_{T,P} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p)_{\Gamma,h}, \quad (6.3)$$

en réécrivant bien sûr les produits scalaires (2.2) et (2.3) pour des vecteurs ou des scalaires et en définissant le “produit scalaire” frontière par

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, p)_{\Gamma, h} := \sum_{j \in \Gamma} |A_j| p_j \times \frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_{k_1(j)}^P + 2\mathbf{u}_{i_2(j)}^T + \mathbf{u}_{k_2(j)}^P \right) \cdot \mathbf{n}_j. \quad (6.4)$$

## 6.2 Discrétisation du problème

Intéressons nous maintenant au problème de Stokes (5.1)-(5.2)-(5.3). On discrétise le vecteur vitesse  $\mathbf{u}$  sur les cellules primales et duales par  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k)_{i \in [1, I+J^\Gamma], k \in [1, K]}$ , tandis que la pression  $p$  est définie sur les cellules-diamants  $(p_j)_{j \in [1, J]}$ .

L'équation  $-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$  est intégrée sur toutes les cellules primales et duales. L'équation  $\nabla \cdot \mathbf{u} = g$  est quant à elle intégrée sur toutes les cellules-diamants tandis que les conditions aux limites  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}$  sont discrétisées de manière *faible* sur les cellules-diamants du bord :

$$-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_i + (\nabla_h^T p)_i = \mathbf{f}_i^T, \quad \forall i \in [1, I], \quad (6.5a)$$

$$-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_k + (\nabla_h^P p)_k = \mathbf{f}_k^P, \quad \forall k \in [1, K], \quad (6.5b)$$

$$(\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_j = g_j^D, \quad \forall j \in [1, J], \quad (6.5c)$$

$$\frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_{k_1(j)} + 2 \mathbf{u}_{i_2(j)} + \mathbf{u}_{k_2(j)} \right) = \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \quad (6.5d)$$

$$\sum_{j \in [1, J]} |D_j| p_j = 0, \quad (6.5e)$$

où  $\mathbf{f}_i^T, \mathbf{f}_k^P$  et  $g_j^D$  sont respectivement les valeurs moyennes de  $\mathbf{f}$  (qui est un champ de vecteurs à deux composantes) sur les cellules primales et duales, et de  $g$  sur les cellules diamants :

$$\mathbf{f}_i^T = \frac{1}{|T_i|} \int_{T_i} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{f}_k^P = \frac{1}{|P_k|} \int_{P_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad g_j^D = \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_j = \frac{1}{|A_j|} \int_{A_j} \sigma(\xi) d\xi. \quad (6.6)$$

On remarque que les équations (6.5a) et (6.5b) sont liées puisque

$$\begin{aligned} \sum_{i \in [1, I]} |T_i| [-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_i + (\nabla_h^T p)_i] &= \sum_{k \in [1, K]} |P_k| [-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_k + (\nabla_h^P p)_k] \\ &= \sum_{j \in \Gamma} |A_j| [(\nabla_h^D \mathbf{u})_j \cdot \mathbf{n}_j + p_j \mathbf{n}_j], \end{aligned}$$

ce qui implique nécessairement la relation de compatibilité suivante

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{f}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{f}_k^P. \quad (6.7)$$

Cette relation est vraie grâce à (6.6) puisque ces deux sommes valent  $\int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$ . Dans la pratique, lorsque  $\mathbf{f}_i^T$  et  $\mathbf{f}_k^P$  ne sont pas calculés de façon exacte (par exemple, par une formule de quadrature) comme dans (6.6), la relation (6.7) nous conduit à projeter le vecteur  $\mathbf{f}$  sur l'espace des fonctions de dimension  $2(I + K) - 2$  en remplaçant  $\mathbf{f}_i^T$  par  $\tilde{\mathbf{f}}_i^T = \mathbf{f}_i^T - c$  et  $\mathbf{f}_k^P$  par  $\tilde{\mathbf{f}}_k^P = \mathbf{f}_k^P + c$  avec  $c = \frac{\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{f}_i^T - \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{f}_k^P}{2|\Omega|}$ , de telle sorte que

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \tilde{\mathbf{f}}_i^T = \sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{f}_i^T - |\Omega| c = \frac{\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{f}_i^T + \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{f}_k^P}{2}$$

et

$$\sum_{k \in [1, K]} |P_k| \tilde{\mathbf{f}}_k^P = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{f}_k^P - |\Omega| c = \frac{\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{f}_i^T + \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{f}_k^P}{2}.$$

D'autre part, les équations (6.5c) et (6.5d) sont liées puisque

$$\sum_{j \in [1, J]} |D_j| (\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_j = \sum_{j \in \Gamma} \frac{|A_j|}{4} \left( \mathbf{u}_{k_1(j)} + 2 \mathbf{u}_{i_2(j)} + \mathbf{u}_{k_2(j)} \right) \cdot \mathbf{n}_j,$$

ce qui implique la relation de compatibilité

$$\sum_{j \in [1, J]} |D_j| g_j^D = \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n}_j. \quad (6.8)$$

En pratique, lorsque  $g_j^D$  et  $\boldsymbol{\sigma}_j$  ne sont pas calculés de façon exacte comme dans (6.6), on projette la fonction scalaire  $g$  sur l'espace de dimension  $J - 1$  en remplaçant  $g$  par  $\tilde{g}_j^D = g_j^D - d$  avec  $d = \frac{\sum_{j \in [1, J]} |D_j| g_j^D - \sum_{j \in \Gamma} |A_j| \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n}_j}{|\Omega|}$ , de telle sorte que

$$\sum_{j \in [1, J]} |D_j| \tilde{g}_j^D = \sum_{j \in [1, J]} |D_j| g_j^D - |\Omega| d = \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{n}_j.$$

Nous allons voir dans la suite que montrer l'existence et l'unicité de la solution du schéma (6.5) n'est pas aisé. En effet, nous ne savons pas montrer l'injectivité de l'opérateur gradient  $\nabla_h^{T, P}$  lié à la pression en général.

### 6.3 Existence et unicité de la solution dans le cas de triangles conformes

Le système linéaire comporte  $2(I + J^\Gamma + K) + J$  inconnues provenant des  $2(I + J^\Gamma + K)$  inconnues de vitesse et des  $J$  inconnues de pression. D'autre part, nous avons  $2(I + K) + J +$

$2J^\Gamma + 1 - 3$  équations indépendantes compte tenu des trois relations (6.7) et (6.8) ( $\mathbf{f}$  étant un vecteur à deux composantes et  $g$  un scalaire). Il nous manque donc deux équations pour avoir un système carré. Nous proposons les deux relations suivantes  $\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{u}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{u}_k^P$  (rappelons que  $\mathbf{u}$  a deux composantes) dont chacun des membres peut être interprété comme une discrétisation de  $\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Maintenant, le système présente autant d'équations que d'inconnues. Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution discrète du problème, on peut par exemple montrer l'injectivité du système.

Supposons que  $\mathbf{f}_i^T = 0$ ,  $\mathbf{f}_k^P = 0$ ,  $g_j^D = 0$  et  $\sigma_j = 0$ . En multipliant l'équation (6.5a) (resp. l'équation (6.5b)) par  $|T_i| \mathbf{u}_i^T$  (resp.  $|P_k| \mathbf{u}_k^P$ ) et en sommant sur les  $i \in [1, I]$  (resp.  $k \in [1, K]$ ), on obtient :

$$-(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \mathbf{u}, \mathbf{u})_{T,P} + (\nabla_h^{T,P} p, \mathbf{u})_{T,P} = 0.$$

En appliquant ensuite la formule de Green discrète (2.13), en l'adaptant à des vecteurs, et la formule de Green (6.3) vérifiée par les nouveaux opérateurs, l'équation précédente se réécrit :

$$(\nabla_h^D \mathbf{u}, \nabla_h^D \mathbf{u})_D - (\nabla_h^D \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u})_{\Gamma,h} - (p, \nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_D + (p \mathbf{n}, \mathbf{u})_{\Gamma,h} = 0.$$

Puisque  $g_j^D = 0$  et  $\sigma_j = 0$ , il reste  $(\nabla_h^D \mathbf{u}, \nabla_h^D \mathbf{u})_D = 0$  ce qui implique  $(\nabla_h^D \mathbf{u}_x)_j = (\nabla_h^D \mathbf{u}_y)_j = 0$ ,  $\forall j \in [1, J]$ , et on en déduit que

$$\mathbf{u}_i^T = \mathbf{c}^T, \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \text{ et } \mathbf{u}_k^P = \mathbf{c}^P, \forall k \in [1, K],$$

où  $\mathbf{c}^T$  et  $\mathbf{c}^P$  sont deux vecteurs constants. Et puisque  $\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{u}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{u}_k^P$ , nécessairement  $\mathbf{c}^T = \mathbf{c}^P$  et grâce à l'équation (6.5d), on en déduit que  $\mathbf{c}^T = \mathbf{c}^P = 0$ , soit :

$$\mathbf{u}_i^T = 0, \forall i \in [1, I + J^\Gamma] \text{ et } \mathbf{u}_k^P = 0, \forall k \in [1, K].$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la pression. Rappelons que l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$  est défini par :

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T p)_i &= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| p_j \mathbf{n}_{ji}, \\ (\nabla_h^P p)_k &= \frac{1}{|P_k|} \left( \sum_{j \in \mathcal{E}(k)} \left( |A'_{j_1}| \mathbf{n}'_{jk_1} + |A'_{j_2}| \mathbf{n}'_{jk_2} \right) p_j + \sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]} \frac{1}{2} |A_j| p_j \mathbf{n}_j \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$ , chaque composante de celui-ci résulte d'une combinaison linéaire des  $p_j$ . L'injectivité de l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$  n'est donc pas claire, ce

qui pose un sérieux problème pour montrer l'unicité de la pression et faire l'analyse théorique de ce schéma. En fait, Lekbir Afraïtes et Pascal Omnes [2] n'ont réussi à montrer l'unicité de la pression que dans le cas des maillages triangulaires conformes. En effet, considérons un élément  $T_i$  du maillage primal. Pour simplifier les notations, nous numérotions localement chacune des arêtes de  $T_i$  par  $\alpha = \{1, 2, 3\}$ . Ainsi, nous avons :

$$(\nabla_h^T p)_i = \frac{1}{|T_i|} (p_1 |A_1| \mathbf{n}_1 + p_2 |A_2| \mathbf{n}_2 + p_3 |A_3| \mathbf{n}_3)$$

avec  $|A_1| \mathbf{n}_1 + |A_2| \mathbf{n}_2 + |A_3| \mathbf{n}_3 = 0$  donc

$$(\nabla_h^T p)_i = 0 \Rightarrow (p_1 - p_3) |A_1| \mathbf{n}_1 + (p_2 - p_3) |A_2| \mathbf{n}_2 = 0.$$

Et comme  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  ne sont pas colinéaires, nous en déduisons que  $p_1 = p_2 = p_3$ .

En procédant de la même manière pour un élément  $T'_i$  voisin de  $T_i$ , nous obtenons également  $p'_1 = p'_2 = p'_3$ , et du fait que  $p_1 = p'_1$ , nous avons alors  $p_1 = p_2 = p_3 = p'_2 = p'_3$ .

En raisonnant de la même manière pour les autres triangles  $T_i$ , on en déduit de proche en proche que les  $p_j$  sont tous égaux à une même constante et que cette constante vaut zéro grâce à (6.5e). Ainsi

$$p_j = 0, \quad \forall j \in [1, J].$$

Plus généralement, Lekbir Afraïtes et Pascal Omnes ont montré le théorème suivant :

**Théorème 6.1** *Si  $\Omega$  est un maillage triangulaire conforme dont tous les angles sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ , alors il existe une constante  $C$  indépendante du maillage telle que :*

$$\|p\|_D \leq C \|\nabla_h^{T,P} p\|_{T,P}.$$

Nous ne détaillons pas la preuve ici puisque celle-ci est relativement longue et repose sur des considérations géométriques peu intéressantes.

Remarquons que le raisonnement que nous avons tenu ne fonctionne pas dès qu'il y a plus de trois côtés sur un élément. En effet, numérotons, avec  $\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$  localement, chacune des arêtes de  $T_i$  supposé être un quadrilatère. Alors, nous avons

$$(\nabla_h^T p)_i = \frac{1}{|T_i|} (p_1 |A_1| \mathbf{n}_1 + p_2 |A_2| \mathbf{n}_2 + p_3 |A_3| \mathbf{n}_3 + p_4 |A_4| \mathbf{n}_4)$$

avec  $|A_1| \mathbf{n}_1 + |A_2| \mathbf{n}_2 + |A_3| \mathbf{n}_3 + |A_4| \mathbf{n}_4 = 0$  donc

$$(\nabla_h^T p)_i = 0 \Rightarrow (p_1 - p_4) |A_1| \mathbf{n}_1 + (p_2 - p_4) |A_2| \mathbf{n}_2 + (p_3 - p_4) |A_3| \mathbf{n}_3 = 0.$$

En 2D, le triplet  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$  ne forme pas une base, ainsi nous ne pouvons pas conclure. Par conséquent, en dehors du cas particulier des maillages triangulaires conformes, la question de l'existence et de l'unicité de la solution discrète du problème reste ouverte en général. D'autre part, sur les maillages triangulaires conformes, l'uniformité de la condition inf-sup n'a pas été montrée.

**Remarque 6.1** *Nous allons voir dans la section suivante que des tests numériques ont tout de même pu être faits sur des maillages de carrés non conformes. En effet, dans certains cas particuliers, nous pouvons quand même montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème à l'aide d'une illustration. Pour simplifier, plaçons-nous sur la grille de carrés  $3 \times 3$  de la figure 6.1(a). En reprenant le raisonnement précédent (montrer l'injectivité), nous avons  $\mathbf{u}_i^T = 0, \forall i \in [1, I]$  et  $\mathbf{u}_k^P = 0, \forall k \in [1, K]$ . On en déduit, d'après les équations (6.5a) et (6.5b), que  $(\nabla_h^T p)_i = 0, \forall i \in [1, I]$  et  $(\nabla_h^P p)_k = 0, \forall k \in [1, K]$ .*

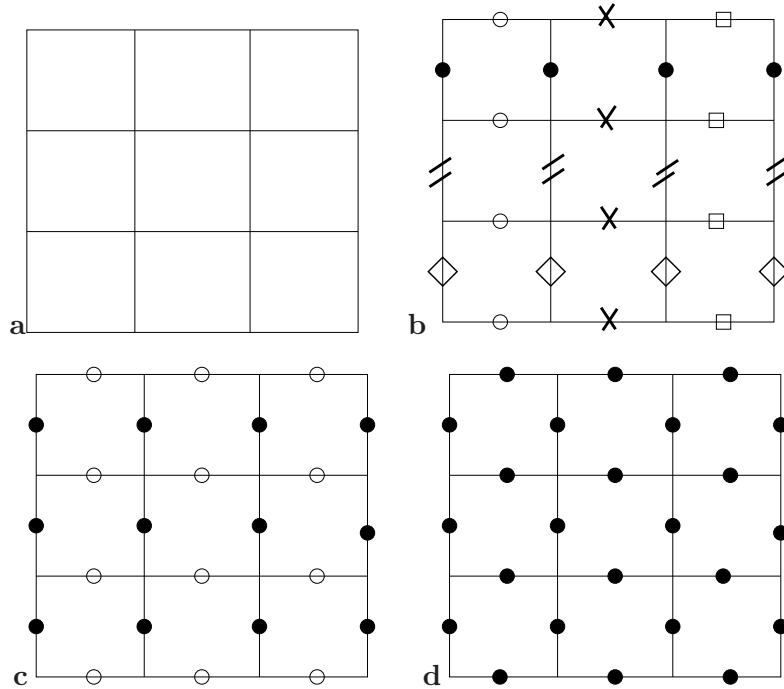


FIG. 6.1 – Unicité de la pression sur une grille uniforme  $3 \times 3$ .

Tout d'abord, supposons que  $(\nabla_h^T p)_{i_0} = 0$  sur la cellule primaire carrée  $T_{i_0}$  de la figure 6.2. D'après la définition du gradient discret, puisque les arêtes sont de longueur égale et grâce à



l'orientation des vecteurs normaux unitaires, on en déduit que :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} p_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_4 = 0,$$

soit  $p_1 = p_3$  et  $p_2 = p_4$ , ce qui est représenté sur la figure 6.2 par les symboles  $\circ$  et  $\bullet$  sur les arêtes. Ainsi, en parcourant toutes les cellules primales, on en déduit, schématiquement, la figure 6.1(b). En procédant de manière analogue pour toutes les cellules duales intérieures

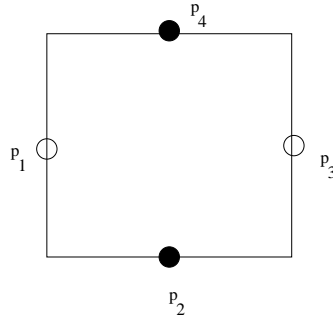


FIG. 6.2 – Valeurs de la pression sur une cellule primaire (ou duale intérieure) lorsque le gradient discret est nul sur celle-ci.

(qui sont carrées), on en déduit que  $\circ = \times = \square$  et  $\bullet = // = \diamond$ , ce qui est représenté sur la figure 6.1(c). Enfin, plaçons nous sur une cellule duale frontière éloignée des sommets du domaines (par exemple), comme sur la figure 6.3. Comme précédemment, d'après la définition du gradient discret, puisque les arêtes sont de longueur égale et grâce à l'orientation des vecteurs normaux unitaires, on en déduit que :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} p_3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} p_3 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} p_1 = 0,$$

soit  $p_1 = p_2 = p_3$  et donc  $\circ = \bullet$ , ce qui est représenté sur la figure 6.1(d). Par conséquent,  $p_j = c$ ,  $\forall j \in [1, J]$ , où  $c$  est une constante réelle. De plus, grâce à l'équation  $\sum_{j \in [1, J]} |D_j| p_j = 0$ , on en déduit finalement que

$$p_j = 0, \quad \forall j \in [1, J].$$

□

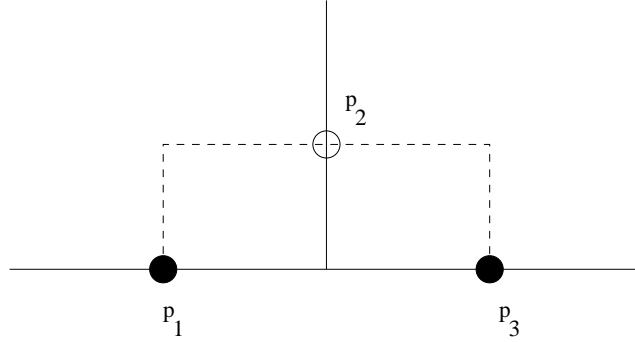


FIG. 6.3 – Valeurs de la pression sur une cellule duale frontière lorsque le gradient discret est nul sur celle-ci.

## 6.4 Équivalence avec une méthode d'éléments finis non-conformes

Dans cette section, nous allons montrer que le schéma (6.5), en supposant que  $\sigma_j = 0$ ,  $\forall j \in J^\Gamma$  dans (6.5d), est équivalent à une méthode d'éléments finis non-conformes. Il faut raisonner comme dans [40] puisque nous travaillons sur le même laplacien même s'il est vectoriel dans ce cas. Posons

$$V = \{(\mathbf{u}_i^T, \mathbf{u}_k^P) : \sum_{i \in [1, J]} |T_i| \mathbf{u}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{u}_k^P \text{ et } \mathbf{u}_{k1(j)}^P + 2\mathbf{u}_{i2(j)}^T + \mathbf{u}_{k2(j)}^P = 0, \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]\}.$$

On définit un opérateur  $L$  injectif sur  $V$  en associant à  $\mathbf{u} \in V$  la fonction  $L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_h \in V_h := L(V)$  définie par

$$(\mathbf{u}_h)_{|D_j} \in P^1(D_j^2), \quad \forall j \in [1, J], \quad (6.9)$$

et

$$\mathbf{u}_h(M_{i_\alpha(j)k_\beta(j)}) = \frac{\mathbf{u}_{i_\alpha(j)}^T + \mathbf{u}_{k_\beta(j)}^P}{2}, \quad \forall j \in [1, J], \quad \forall (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2. \quad (6.10)$$

Notons que la définition d'une fonction  $P^1(D_j)$  par ses valeurs en quatre points non alignés n'est en général pas possible. Mais dans le cas présent, notons encore  $\mathbf{u}_h$  l'unique fonction définie en (6.9) et ses valeurs (6.10) pour les couples  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$ , sauf pour le couple  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  (soit en trois points). Puisque  $\mathbf{u}_h$  est un polynôme du premier degré, nous pouvons écrire

$$\mathbf{u}_h(M_{i_2k_2}) = \mathbf{u}_h(M_{i_2k_1}) + \mathbf{M}_{i_2k_1} \mathbf{M}_{i_2k_2} \cdot \nabla \mathbf{u}_h$$

et

$$\mathbf{u}_h(M_{i_1 k_2}) = \mathbf{u}_h(M_{i_1 k_1}) + \mathbf{M}_{i_1 k_1} \mathbf{M}_{i_1 k_2} \cdot \nabla \mathbf{u}_h.$$

Mais puisque le quadrangle  $(\mathbf{M}_{i_1 k_1}, \mathbf{M}_{i_1 k_2}, \mathbf{M}_{i_2 k_2}, \mathbf{M}_{i_2 k_1})$  est un parallélogramme, l'égalité  $\mathbf{M}_{i_2 k_1} \mathbf{M}_{i_2 k_2} = \mathbf{M}_{i_1 k_1} \mathbf{M}_{i_1 k_2}$  assure que

$$\mathbf{u}_h(M_{i_2 k_2}) = \mathbf{u}_h(M_{i_1 k_2}) + \mathbf{u}_h(M_{i_2 k_1}) - \mathbf{u}_h(M_{i_1 k_1}).$$

Grâce aux définitions (6.10), cette valeur vaut exactement  $\frac{1}{2} (\mathbf{u}_{i_2(j)}^T + \mathbf{u}_{k_2(j)}^P)$ , ce qui assure bien l'existence de  $\mathbf{u}_h$  définie par (6.9) et (6.10) appliqué aux quatre couples  $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$ . De plus, nous avons la propriété essentielle suivante :

$$(\nabla \mathbf{u}_h)|_{D_j} = (\nabla_h^D \mathbf{u})_j \quad \text{et} \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}_h)|_{D_j} = (\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_j, \quad \forall j \in [1, J]. \quad (6.11)$$

En effet, puisque  $\mathbf{u}_h \in V_h$  est  $P^1$  sur  $D_j$ , son gradient y est constant. Ainsi,

$$(\nabla \mathbf{u}_h)|_{D_j} = \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \nabla \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x}.$$

Par la formule de Green, cette quantité est aussi égale à

$$(\nabla \mathbf{u}_h)|_{D_j} = \frac{1}{|D_j|} \int_{\partial D_j} \mathbf{u}_h(\xi) \mathbf{n}(\xi) \, d\xi. \quad (6.12)$$

Notons que  $\partial D_j$  est composé de quatre segments  $[G_{i_\alpha} S_{k_\beta}]$ , sur lesquels la restriction de  $\mathbf{u}_h$  est aussi  $P^1$ . Ainsi, les quatre intégrales dans la formule (6.12) peuvent être évaluées de manière exacte par la règle du point milieu. Le milieu du segment  $[G_{i_\alpha} S_{k_\beta}]$  est par définition  $M_{i_\alpha k_\beta}$ , où les valeurs de  $\mathbf{u}_h$  sont données par (6.10). En sommant les différentes contributions de  $\mathbf{u}_{i_\alpha}^T$  et  $\mathbf{u}_{k_\beta}^P$ , nous obtenons bien  $(\nabla \mathbf{u}_h)|_{D_j} = (\nabla_h^D \mathbf{u})_j$ . En raisonnant de manière similaire, nous obtenons également  $(\nabla \cdot \mathbf{u}_h)|_{D_j} = (\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_j$ .

De plus, nous définissons

$$L_{h_0}^2 = \left\{ p_h \in L_0^2(\Omega) : p_h(\mathbf{x}) = \sum_{j \in [1, J]} p_j \theta_j^D(\mathbf{x}) \right\},$$

où nous rappelons que  $\theta_j^D$  est la fonction caractéristique de  $D_j$ .

**Proposition 6.1** *Le schéma de volumes finis (6.5) est équivalent à la méthode d'éléments finis non-conformes suivante :*

#### 6.4. ÉQUIVALENCE AVEC UNE MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS NON-CONFORMES

Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times L_{h_0}^2$  tel que pour tout  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times L_{h_0}^2$

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \ell(\mathbf{v}_h) \quad (6.13)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = (g, q_h) \quad (6.14)$$

avec

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \sum_{j \in [1, J]} \int_{D_j} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad , \quad \ell(\mathbf{v}_h) := \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v}_h^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad ,$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) := \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}_h q_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad , \quad (g, q_h) := \int_{\Omega} g q_h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

et

$$\mathbf{v}_h^*(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \left( \sum_{i \in [1, I]} \mathbf{v}_i^T \theta_i^T + \sum_{k \in [1, K]} \mathbf{v}_k^P \theta_k^P \right).$$

**Preuve** Nous ne donnons qu'une idée de la preuve.

Soit  $\mathbf{v}_h \in V_h$ . Alors il existe un unique  $\mathbf{v} \in V$  tel que  $\mathbf{v}_h = L(\mathbf{v})$ . Les équations (6.5a) et (6.5b) impliquent que

$$-(\nabla_h^{T,P} \cdot \nabla_h^D \mathbf{u}, \mathbf{v})_{T,P} + (\nabla_h^{T,P} p, \mathbf{v})_{T,P} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{T,P}. \quad (6.15)$$

En appliquant successivement la formule de Green (2.13) en tenant compte de (6.5d), puis (6.11), on en déduit que le membre de gauche de (6.15) est égal au membre de gauche de (6.13). Ensuite, par définition de  $\mathbf{v}_h^*$  et du fait que  $\mathbf{f}_i^T$  (resp.  $\mathbf{f}_k^P$ ) est la moyenne de  $\mathbf{f}$  sur  $T_i$ , le membre de droite de (6.15) est égal au membre de droite de (6.13).

D'autre part, soit  $q_h \in L_{h_0}^2$ . Alors l'équation (6.5c) implique que

$$(\nabla_h^D \cdot \mathbf{u}, q_h)_D = (g, q_h)_D.$$

En appliquant (6.11), on en déduit (6.14).

Réciproquement, soit  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times L_{h_0}^2$  vérifiant (6.13). Alors, il existe un unique  $\mathbf{u}$  tel que  $\mathbf{u}_h = L(\mathbf{u})$  et par définition,  $\mathbf{u}$  vérifie les conditions aux limites (6.5d) et  $\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \mathbf{u}_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \mathbf{u}_k^P$ . Soit  $i_0 \in [1, I]$  et  $\mathbf{v}$  défini par

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad \mathbf{v}_i^T = \delta_i^{i_0} - \frac{|T_{i_0}|}{2|\Omega|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, K], \quad \mathbf{v}_k^P = \frac{|T_{i_0}|}{2|\Omega|}.$$

Notons que  $\mathbf{v} \in V$ . En partant de (6.13) appliqué à  $\mathbf{v}_h = L(\mathbf{v})$ , on en déduit que

$$-(\nabla_h^T \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_{i_0} + (\nabla_h^T p)_{i_0} = \mathbf{f}_{i_0}^T.$$

En raisonnant ensuite pour  $k_0 \in [1, K - J^\Gamma]$  avec

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad \mathbf{v}_i^T = \frac{|P_{k_0}|}{2|\Omega|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, K], \quad \mathbf{v}_k^P = \delta_k^{k_0} - \frac{|P_{k_0}|}{2|\Omega|},$$

et pour  $k_0 \in [K - J^\Gamma + 1, K]$  avec

$$\forall i \in [1, I + J^\Gamma], \quad \mathbf{v}_i^T = -\frac{1}{2} \left( \delta_i^{i1(k_0)} + \delta_i^{i2(k_0)} \right) + \frac{|P_{k_0}|}{2|\Omega|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, K], \quad \mathbf{v}_k^P = \delta_k^P - \frac{|P_{k_0}|}{2|\Omega|},$$

on obtient

$$-(\nabla_h^P \cdot \nabla_h^D \mathbf{u})_k + (\nabla_h^P p)_{k_0} = \mathbf{f}_{k_0}^P.$$

Enfin, pour  $j_0 \in [1, J]$  et  $q \in L_{h_0}^2$  tels que

$$\forall j \in [1, J] \quad q_j = \delta_j^{j_0} - \frac{|D_{j_0}|}{|\Omega|},$$

on en déduit que

$$(\nabla_h^D \cdot \mathbf{u})_{j_0} = g_{j_0}.$$

□

## 6.5 Calcul de la fonction de courant $\psi$

Pour les opérateurs continus, la vitesse et la fonction de courant (qui, soulignons le, est une fonction scalaire) sont liées par la relation suivante :  $\mathbf{u} = \nabla \times \psi$ . En ce qui concerne le schéma DDFV dual discret, les inconnues de vitesse  $(\mathbf{u}_i^T, \mathbf{u}_k^P)_{i \in [1, I + J^\Gamma], k \in [1, K]}$  se situent sur les cellules primales et duales. Selon le principe de dualité de la méthode DDFV, il est donc naturel de définir les inconnues liées à  $\psi$  sur les cellules-diamants. On définit donc un nouvel opérateur rotationnel vecteur d'un scalaire sur les cellules-diamants :

$$\begin{aligned} (\nabla_h^T \times \psi)_i &:= \frac{1}{|T_i|} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} |A_j| \psi_j \boldsymbol{\tau}_{ji}, \\ (\nabla_h^P \times \psi)_k &:= \frac{1}{|P_k|} \left( \sum_{j \in \mathcal{E}(k)} \left( |A'_{j1}| \boldsymbol{\tau}'_{jk_1} + |A'_{j2}| \boldsymbol{\tau}'_{jk_2} \right) \psi_j + \sum_{j \in \mathcal{E}(k) \cap [J - J^\Gamma + 1, J]} \frac{1}{2} |A_j| \psi_j \boldsymbol{\tau}_j \right). \end{aligned}$$

Comme pour l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$ , on peut montrer l'injectivité de cet opérateur sur des maillages triangulaires. En revanche, elle n'est pas garantie dans les autres cas, si bien que nous n'avons pas nécessairement l'existence et l'unicité d'un  $\psi$  vérifiant  $\mathbf{u} = \nabla_h^{T,P} \times \psi$ .

## 6.6 Décomposition de Hodge

Enfin, pour la décomposition de Hodge (2.23), on se heurte, encore une fois, au problème de l'injectivité de l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$  et de l'opérateur  $\nabla_h^{T,P} \times$  que nous avons définis ci-dessus. Écrivons tout de même la décomposition de Hodge :

$$\mathbf{u}_{i,k}^{T,P} = (\nabla_h^{T,P} \phi)_{i,k} + (\nabla_h^{T,P} \times \psi)_{i,k}, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K],$$

$$\psi_j = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \text{ et } \psi_j = c_q \text{ sur } \Gamma_q, \quad \forall j \in [1, Q],$$

$$\sum_{j \in [1, J]} |D_j| \phi_j = 0.$$

Pour des domaines non-simplement connexes, la formule d'Euler ne joue pas en notre faveur dans ce sens puisque le nombre d'inconnues pour  $(\phi_j)_{j \in [1, J]}$ ,  $(\psi_j)_{j \in [1, J]}$  et  $(c_q)_{q \in [1, Q]}$  serait  $2J + Q$ , ce qui par la formule d'Euler (2.24) est encore égal à  $2(I + K) + 3Q - 2$ . D'autre part, on dénombre  $2(I + K) + J^T + 1$  équations. Donc il n'y a aucune raison pour que le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues. De plus, les opérateurs  $\nabla_h^{D,P}$  et  $\nabla_h^{T,P} \times$  ne sont pas orthogonaux puisque  $(\nabla_h^D \cdot \nabla_h^{T,P} \times \bullet) \neq 0$  en général.

## 6.7 Résultats numériques

Sauf indication contraire, le domaine de calcul est  $\Omega = [0, 1]^2$ . Nous choisissons  $\mathbf{f}, g$  et  $\sigma$  de telle sorte que la solution exacte du problème est donnée par :

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) \\ x \sin(\pi y) + \cos(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p} = xy \exp(x) \cos(\pi y) + c,$$

le réel  $c$  étant choisi afin que  $\int_{\Omega} \hat{p} = 0$ .

L'erreur discrète relative  $L^2$  de la vitesse sur les cellules primales et duales est mesurée par la formule suivante :

$$e^2(h) := \frac{\frac{1}{2} [\sum_i |T_i| |\mathbf{u}_i^T - (\Pi \hat{\mathbf{u}})_i^T|^2 + \sum_k |P_k| |\mathbf{u}_k^P - (\Pi \hat{\mathbf{u}})_k^P|^2]}{\frac{1}{2} [\sum_i |T_i| |(\Pi \hat{\mathbf{u}})_i^T|^2 + \sum_k |P_k| |(\Pi \hat{\mathbf{u}})_k^P|^2]},$$

où  $\forall i \in [1, I]$ ,  $(\Pi \hat{\mathbf{u}})_i^T = \hat{\mathbf{u}}(G_i)$  et  $\forall k \in [1, K]$ ,  $(\Pi \hat{\mathbf{u}})_k^P = \hat{\mathbf{u}}(S_k)$ , tandis que l'erreur discrète relative  $L^2$  du gradient de la vitesse sur les cellules-diamants est calculée par :

$$(e1)^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| \left[ \left( (\nabla_h^D \mathbf{u}_x)_j - (\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_x)_j \right)^2 + \left( (\nabla_h^D \mathbf{u}_y)_j - (\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_y)_j \right)^2 \right]}{\sum_j |D_j| \left[ (\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_x)_j^2 + (\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_y)_j^2 \right]},$$

où  $\forall j \in [1, J], (\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_x)_j = (\nabla \hat{\mathbf{u}}_x)(B_j)$  et  $(\Pi \nabla \hat{\mathbf{u}}_y)_j = (\nabla \hat{\mathbf{u}}_y)(B_j)$ , où  $B_j$  est le centre de gravité de la cellule-diamant  $D_j$ .

Nous nous sommes également intéressés à la convergence de la pression  $p$  que nous avons mesurée en norme  $L^2$  en calculant l'erreur suivante sur les cellules-diamants :

$$(e0p)^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |p_j - (\Pi \hat{p})_j|^2}{\sum_j |D_j| |(\Pi \hat{p})_j|^2},$$

où  $\forall j \in [1, J], (\Pi \hat{p})_j = \hat{p}(B_j)$ . Enfin, on mesure l'erreur du gradient de pression en calculant la norme  $L^2$  discrète suivante :

$$(e1p)^2(h) := \frac{\frac{1}{2} [\sum_i |T_i| |(\nabla_h^T p)_i - (\Pi \nabla \hat{p})_i|^2 + \sum_k |P_k| |(\nabla_h^P p)_k - (\Pi \nabla \hat{p})_k^P|^2]}{\frac{1}{2} [\sum_i |T_i| |(\Pi \nabla \hat{p})_i^T|^2 + \sum_k |P_k| |(\Pi \nabla \hat{p})_k^P|^2]}.$$

### 6.7.1 Maillages non-structurés.

Nous testons tout d'abord la méthode sur 6 maillages de triangles non-structurés construits de sorte que chaque segment du carré unité est divisé par 5, 10, 20, 40, 80 et 160. On a montré que, sur ces maillages, la solution du problème existe et est unique. Le premier maillage de cette famille est représenté sur la figure 6.4, avec les erreurs numériques (à l'échelle logarithmique) de la vitesse, du gradient de vitesse et de la pression. On constate que la vitesse converge à l'ordre 2 tandis que son gradient ainsi que la pression convergent à l'ordre 1.

### 6.7.2 Maillages fortement non-conformes

Nous nous intéressons maintenant à une deuxième famille constituée de maillages non-conformes en damier. Soit  $n$  un entier. Nous découpons  $\Omega$  en  $(2^n + 1) \times (2^n + 1)$  carrés identiques. Ensuite, nous raffinons ce maillage localement en damier ; ce qui signifie qu'un carré sur deux est lui-même divisé en  $2^n \times 2^n$  sous-carrés identiques. Nous choisissons ici  $n \in [1; 4]$ . On vérifie, en procédant de manière similaire (avec un peu d'astuce) à la remarque 6.1, que la solution du problème existe et est unique pour ces maillages. Le premier maillage de cette famille avec  $n = 1$  est représenté sur la figure 6.5 (voir Fig. 3.4 pour  $n = 2$ ), avec les erreurs numériques (à l'échelle logarithmique) de la vitesse, de son gradient et de la pression. Comme précédemment, la vitesse converge à l'ordre 2 tandis que son gradient ainsi que la pression convergent à l'ordre 1.

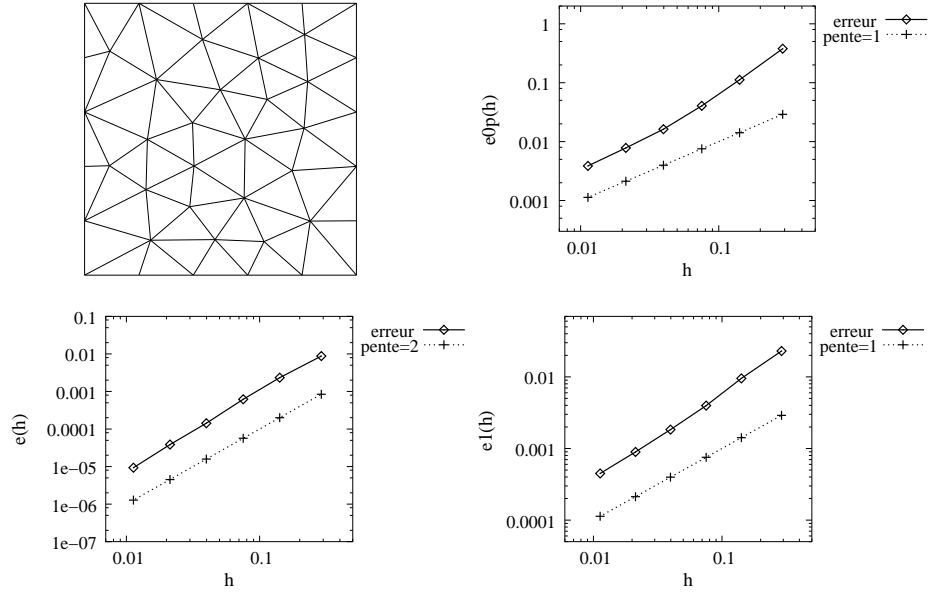


FIG. 6.4 – Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-structurés.

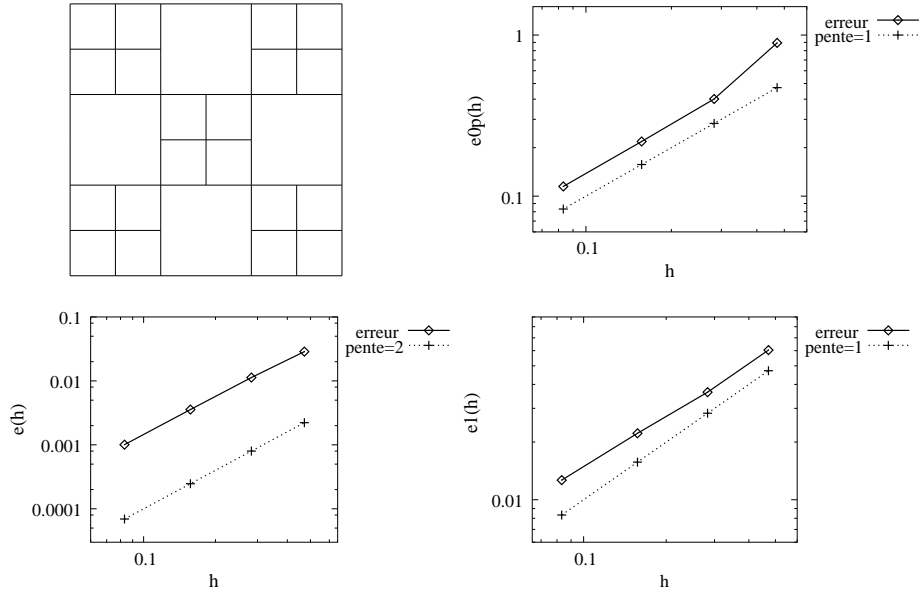


FIG. 6.5 – Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-conformes en damier.



### 6.7.3 Maillages avec une non-conformité locale.

Nous testons maintenant une autre famille de maillages non-conformes dont les deux premiers maillages sont représentés sur la figure 6.6. Cette famille a un réel intérêt puisqu'elle trouve des applications en physique quand les variations de la solution sont très localisées. On vérifie, en procédant de manière similaire (avec un peu d'astuce) à la remarque 6.1, que la solution du problème existe et est unique pour ces maillages. Nous remarquons sur la figure 6.7 que la vitesse (resp. son gradient) converge une fois de plus à l'ordre 2 (resp. à l'ordre 1). Compte tenu de la structure particulière de ce maillage, on observe une super-convergence sur la pression puisqu'elle converge à l'ordre 1.5 et son gradient à l'ordre 0.5.

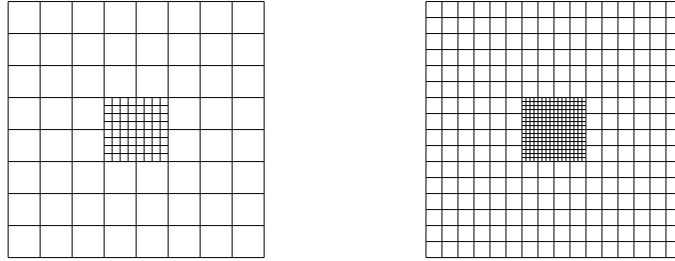


FIG. 6.6 – Maillages raffinés au centre.

### 6.7.4 Maillages non-simplement connexes.

Pour terminer, nous considérons un domaine non-simplement connexe  $\Omega = [0, 1]^2 \setminus [1/3, 2/3]^2$  maillé par des triangles non-structurés, en divisant chaque arête de la frontière extérieure par 6, 12, 24, 48 et 96, et chaque arête de la frontière intérieure par 2, 4, 6, 8, 16, 32. Nous avons montré que la solution du problème discret existe et est unique pour des maillages triangulaires. Le premier maillage est représenté sur la figure 6.8. Comme pour les familles de maillages non-structurés ou non-conformes en damier, on observe que la vitesse converge à l'ordre 2. Le gradient de vitesse converge à l'ordre 1 tandis que la pression converge à l'ordre 1.5.

### 6.7.5 Conclusion

Nous avons obtenu d'excellents résultats numériques avec ce schéma sur les familles de maillages que nous avons utilisées. De plus, on vérifie qu'il est équivalent à une méthode

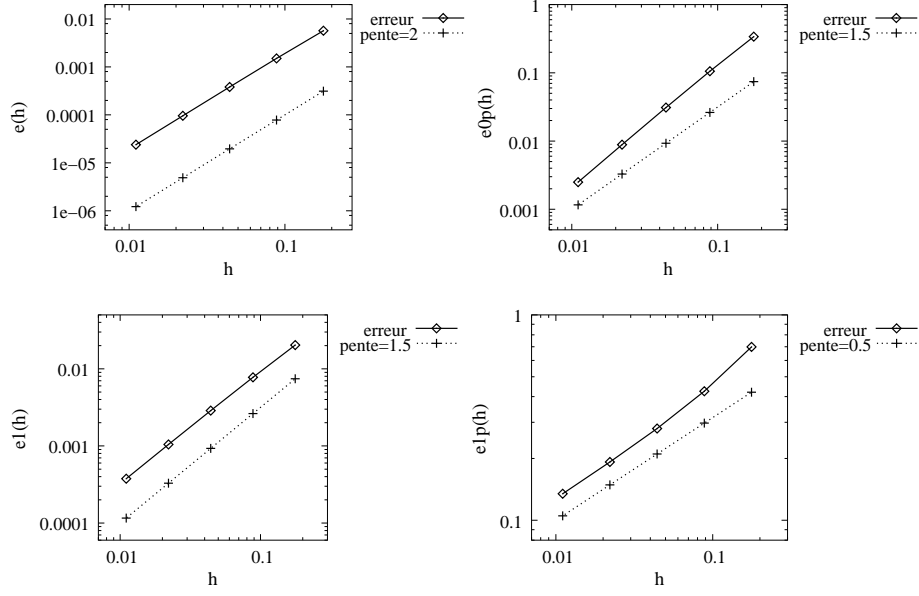


FIG. 6.7 – Convergence de la vitesse, de la pression et de leurs gradients respectifs pour des maillages raffinés au centre.

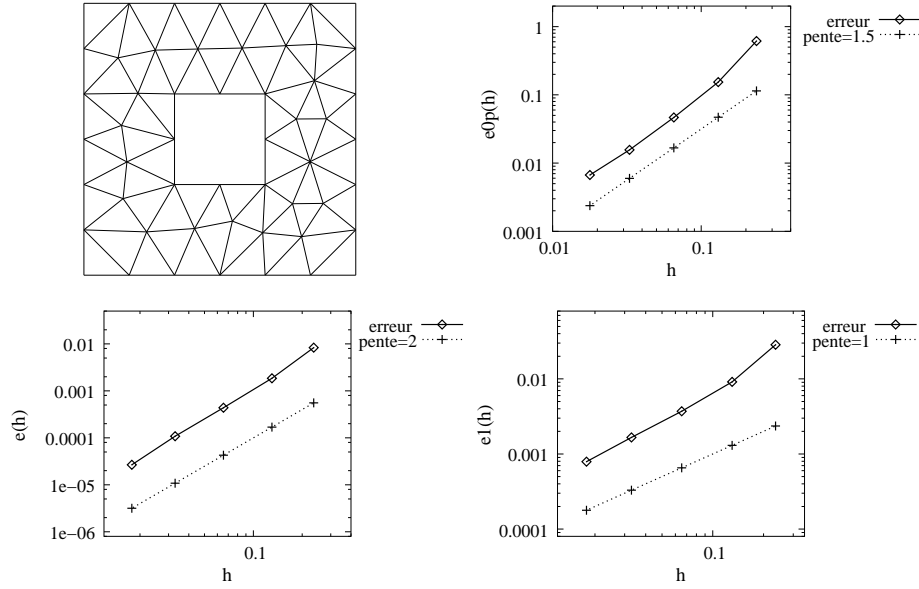


FIG. 6.8 – Convergence de la pression, de la vitesse et de son gradient pour des maillages non-simplement connexes.

d'éléments finis non-conformes, même si, pour l'instant, cela n'a pas aidé Pascal Omnes et Lekbir Afraïtes à faire l'analyse de convergence. Cependant, il présente aussi de très gros défauts puisqu'il fait intervenir beaucoup d'opérateurs comparé au chapitre 5, et en particulier, l'opérateur  $\nabla_h^{T,P}$  dont on ne sait montrer l'injectivité que dans le cas de maillages triangulaires conformes (et quelques maillages de carrés conformes ou non conformes), ce qui rend l'analyse difficile puisque l'existence et l'unicité de la solution du problème ne sont pas claires en général. D'autre part, la décomposition de Hodge discrète est mise en défaut. Pour toutes ces raisons, nous n'avons pas retenu ce schéma pour traiter le problème de Stokes ou plus généralement, les problèmes de mécanique des fluides.

## Chapitre 7

# Extension au problème de Navier-Stokes et préconditionnement

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons la résolution numérique des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, discrétisées par la méthode DDFV, et le preconditionnement du problème linéarisé. La partie preconditionnement s'est faite en collaboration avec Delphine Jennequin [70] et une partie de ce chapitre est tirée de [37].

L'intérêt pour la discrétisation des équations de Stokes et de Navier-Stokes par des schémas de volumes finis s'est accru ces dernières années (voir par exemple [50, 20, 93, 106, 101]). En effet, leurs propriétés de conservation [92] font de ces méthodes de bonnes candidates pour la simulation de la turbulence dans des géométries complexes [81, 78]. Deux classes de méthodes de volumes finis sont principalement utilisées pour les équations de Navier-Stokes : les schémas basés sur des maillages colocalisés, et ceux basés sur les maillages décalés. Dans les schémas utilisant des maillages colocalisés, les inconnues de vitesse et de pression sont situées au centre des cellules. L'approche la plus classique est la méthode introduite par Rhie et Chow [99] avec correction sur la pression, et de récentes améliorations ont été données par [93, 76]. L'intérêt majeur des grilles colocalisées provient du fait que les schémas obtenus en

2D s'étendent facilement en 3D [93]. En ce qui concerne les schémas avec grilles décalées, des localisations différentes sont utilisées pour les inconnues de vitesse et de pression. On peut poser les inconnues de pression au centre des cellules et les composantes normales de la vitesse au milieu des arêtes. En particulier, le schéma MAC (Marker and Cell) développé initialement par Harlow & Welch [58] sur des grilles rectangulaires décalées est très populaire (voir aussi Patankar [91]). Il est aussi possible de poser les inconnues de pression aux centres et le vecteur vitesse sur les arêtes du maillage triangulaire [63]. Cette liste n'est pas exhaustive, mais il faut retenir que les méthodes de volumes finis classiques s'appliquent sur des maillages avec des contraintes d'orthogonalité telles que les grilles rectangulaires ou sur des maillages dits "admissibles" (voir [48, Def. 9.1]), qui peuvent être vus comme une généralisation des maillages de Delaunay-Voronoi. Cependant, dans les problèmes courants avec des géométries complexes, on a parfois besoin de grilles avec des raffinements non-conformes localisés. La recherche s'est orientée dans ce sens pour étendre les méthodes sur grilles décalées à des grilles non-uniformes [108].

Dans ce qui suit, nous nous focalisons sur la méthode de volumes finis en dualité discrète décrite dans [40] pour le problème de Laplace et qu'on appelle méthode DDFV [35]. Le principal intérêt de cette méthode de volumes finis sur grilles décalées, est qu'elle s'applique sur presque tous les maillages (non-structurés et non-conformes) sans contrainte d'orthogonalité. Ensuite, cette méthode est étendue dans le chapitre 3 au problème Div-Rot, et peut être vue comme une généralisation, sur des maillages arbitraires, de la méthode de covolumes développée par Nicolaides [85, 86] sur des maillages de Delaunay-Voronoi. Enfin, dans le chapitre 5, on a étudié le problème de Stokes avec des conditions aux limites standard (5.3) mais aussi non-standard (5.4) à (5.7), et nous étendons ici ce travail aux équations de Navier-Stokes avec des conditions aux limites de Dirichlet : étant donnés  $\mathbf{f}$  et  $g$ , trouver  $(\mathbf{u}, p)$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, & \end{array} \right. \quad (7.1)$$

où  $\Omega$  est un domaine ouvert et borné de  $\mathbb{R}^2$  avec une frontière lipschitzienne. Notons que le membre de droite satisfait la condition de compatibilité :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi) \, d\xi = 0. \quad (7.2)$$

La formulation rotationnelle est parfois utilisée pour des discrétisations sur des grilles non-structurées décalées [92, 78]. Pour des opérateurs continus,  $-\Delta \mathbf{u}$  peut se réécrire

$$-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

D'autre part, on utilise la formulation rotationnelle de  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  :

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right), \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z = -(\mathbf{u}_y, \mathbf{u}_x)^T$  en prenant  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  les deux composantes du vecteur  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ , pour lequel nous associons la pression de Bernoulli

$$\pi = p + \frac{\mathbf{u}^2}{2}. \quad (7.4)$$

Enfin, pour assurer l'unicité de  $\pi$ , on impose  $\int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . Ainsi, le problème (7.1) peut être transformé en : étant donnés  $\mathbf{f}$  et  $g$ , trouver  $(\mathbf{u}, \pi)$  tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu [\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla \pi &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{array} \right. \quad (7.5)$$

Lorsque les équations de Navier-Stokes sont résolues par une méthode de type point-fixe (voir [105]), nous devons résoudre un système linéaire à chaque itération non-linéaire, ce qui prend la forme d'un problème de point-selle :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Ce système étant assez difficile à résoudre numériquement, il est judicieux de recourir au préconditionnement pour ne pas perdre trop de temps à chaque itération non linéaire. Ainsi, il peut être résolu par une méthode d'Uzawa (on travaille tout d'abord sur l'espace de pression, puis on en déduit la vitesse, voir plus loin) ou par un préconditionneur de type pression convection-diffusion [71, 103] (on préconditionne le système complet). Les deux méthodes requièrent un préconditionneur pour le complément de Schur  $S = -BA^{-1}B^T$ . En effet, il est bien évident que cette matrice ne peut être construite explicitement car il est inimaginable de calculer l'inverse de  $A$ . Dans [87, 88], Olshanskii construit un solveur pour les équations de Navier-Stokes avec la forme rotationnelle. Il prouve que, quand le problème est discrétisé par

des éléments finis stables (c'est à dire vérifiant la condition inf-sup), le complément de Schur est spectralement équivalent à la matrice de masse de la pression. Dans [45], Elman et al. introduisent un préconditionneur basé sur les commutateurs approchés. L'idée générale est qu'en développant  $-(BB^T)(BA^{-1}B^T)^{-1}(BB^T)$ , *formellement*, on obtient le complément de Schur. Cette méthode peut être vue comme une extension algébrique des préconditionneurs basés sur les commutateurs formels décrits dans [71, 46]. Ces derniers reposent, entre autres, sur un argument heuristique : les opérateurs  $B$  et  $A^{-1}$  commutent, d'où  $-BA^{-1}B^T \sim -A^{-1}(BB^T)$ , où  $BB^T$  est la matrice du problème de Laplace. D'autre part, Olshanskii et Vassilevski [89] introduisent une variation du préconditionneur d'Elman dont les performances sont indépendantes du pas du maillage pour des nombres de Reynolds modérés. Toutes ces analyses et tests ont été faits avec des méthodes d'éléments finis ou le schéma aux différences finies MAC. En fait, de nombreux préconditionneurs efficaces sont connus pour les problèmes de points-selles provenant des discrétisations en éléments finis, mais leur adaptation aux matrices issues de discrétisations en volumes finis n'est pas triviale et peut même être impossible : par exemple, notre cadre de travail rend le préconditionneur décrit en [103] inutilisable. En effet, les préconditionneurs basés sur les commutateurs formels ne sont pas bien définis sur les grilles décalées : dans notre cas,  $A$  et  $BB^T$  ne vivent pas dans les mêmes espaces et il est difficile de réinterpréter  $A$  sur les cellules primales et duales. De plus, la formulation rotationnelle de la convection est rarement utilisée pour tester les performances des solveurs du problème de point-selle issu de Navier-Stokes.

Finalement, nous comparons, par des résultats numériques, plusieurs types de préconditionneurs qui peuvent s'adapter à la méthode DDFV et il ressort de cette étude que les préconditionneurs basés sur les commutateurs approchés (Elman [45]) peuvent être utilisés comme une boîte noire pour résoudre notre problème de point-selle.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 7.2, nous nous focalisons sur les équations de Navier-Stokes et présentons leur discrétisation. La section 7.3 est consacrée à la description d'un solveur itératif et de préconditionneurs pour le problème de Navier-Stokes discret en formulation rotationnelle. Enfin, nous illustrons ce chapitre dans la section 7.4 sur des maillages non-structurés et non-conformes, puis nous traitons le cas test de la cavité 2D à paroi défilante. Enfin, nous comparons numériquement les performances de quelques préconditionneurs adaptés à DDFV.

## 7.2 Discrétisation des équations de Navier-Stokes

### 7.2.1 Résolution du problème d'Oseen

Nous nous intéressons à l'approximation du problème continu non-linéaire (7.5). Dans un processus itératif (voir [105] pour quelques exemples d'algorithmes) pour résoudre la non-linéarité, nous résolvons un système linéaire, appelé problème d'Oseen, avec un  $\mathbf{u}_G$  donné :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu [\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}] + (\nabla \times \mathbf{u}_G) \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z + \nabla \pi &= \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= 0. \end{array} \right. \quad (7.7)$$

Dans ce qui suit, nous supposons que le maillage primal satisfait l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 7.1** *Nous supposons que chaque cellule primale a seulement une arête qui appartient à la frontière  $\Gamma$ .*

**Remarque 7.1** *Ce n'est pas une restriction sévère puisque nous pouvons toujours découper les cellules frontières de telle sorte que le maillage résultant vérifie cette hypothèse.*

Nous cherchons l'approximation  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  de la vitesse  $\mathbf{u}$  sur les cellules-diamants et l'approximation  $(\pi_i^T)_{i \in [1, I]}$ ,  $(\pi_k^P)_{k \in [1, K]}$  de la pression de Bernoulli  $\pi$  respectivement sur les cellules primales et duales.

Nous discrétisons la première équation de (7.7) sur les cellules-diamants intérieures et la seconde équation de (7.7) sur les cellules primales et duales à la fois. D'autre part, la condition aux limites  $\mathbf{u} = 0$  est discrétisée sur les cellules-diamants de la frontière tandis que la condition sur la pression (moyenne nulle) est discrétisée sur les cellules primales et duales.

En vue d'un procédé itératif pour la résolution des équations de Navier-Stokes, nous allons supposer que les localisations des valeurs de  $\mathbf{u}_G$  sont les mêmes que celles de  $\mathbf{u}$ , c'est à dire sur les cellules-diamants. Ainsi, nous pouvons calculer  $\nabla \times \mathbf{u}_G$  sur les cellules primales et duales par (2.12). Cependant, puisque la première équation de (7.7) est discrétisée sur les cellules-diamants, nous allons utiliser la formule de quadrature suivante pour calculer  $\nabla \times \mathbf{u}_G$  sur tout  $D_j$  :

$$(\nabla \times \mathbf{u}_G)|_{D_j} \approx \frac{(\nabla_h^T \times \mathbf{u}_G)_{i_1} + (\nabla_h^T \times \mathbf{u}_G)_{i_2} + (\nabla_h^P \times \mathbf{u}_G)_{k_1} + (\nabla_h^P \times \mathbf{u}_G)_{k_2}}{4}. \quad (7.8)$$



De plus, pour toute cellule diamant  $D_j$ , nous posons :

$$- [\Delta_h^D \mathbf{u}]_j = (\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_j - (\nabla_h^D \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_j. \quad (7.9)$$

Maintenant nous pouvons discrétiser le problème continu (7.7) par le système suivant :

$$-\nu [\Delta_h^D \mathbf{u}]_j + (\nabla \times \mathbf{u}_G)_{|D_j} \mathbf{u}_j \times \mathbf{e}_z + (\nabla_h^D \pi)_j = \mathbf{f}_j^D, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma], \quad (7.10)$$

$$(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = 0, \quad \forall i \in [1, I], \forall k \in [1, K], \quad (7.11)$$

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j^D, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J], \quad (7.12)$$

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \pi_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| \pi_k^P = 0, \quad (7.13)$$

où nous avons posé

$$\mathbf{f}_j^D = \frac{1}{|D_j|} \int_{D_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma], \quad \mathbf{f}_j^D = 0, \quad \forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]. \quad (7.14)$$

Comme précédemment, en notant  $\mathbf{u}_j = (\mathbf{u}_{jx}, \mathbf{u}_{jy})$ , nous avons les égalités suivantes :

$$\mathbf{u}_j \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_j = (-\mathbf{u}_{jy}, \mathbf{u}_{jx})^T, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma],$$

qui impliquent la propriété essentielle suivante, pour laquelle nous avons choisi la formulation rotationnelle :

**Propriété 7.1** *Pour tout vecteur  $\mathbf{u}_j$ , le terme de convection de l'équation (7.10) satisfait :*

$$(\nabla \times \mathbf{u}_G)_{|D_j} (\mathbf{u}_j \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma]. \quad (7.15)$$

**Proposition 7.1** *Sous l'hypothèse 7.1, la solution  $((\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}, (\pi_i^T)_{i \in [1, I]}, (\pi_k^P)_{k \in [1, K]})$  de (7.10)-(7.13) existe et est unique.*

**Preuve** Le système (7.10) à (7.13) fournit  $2(J - J^\Gamma) + (I + K) + 2J^\Gamma + 2$  équations mais les équations (7.11) et (7.12) ne sont pas indépendantes puisqu'elles satisfont une relation de compatibilité. En effet, la définition 2.3 fournit les deux relations suivantes :

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| (\nabla_h^T \cdot \mathbf{u})_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| (\nabla_h^P \cdot \mathbf{u})_k^P = \sum_{j \in [J - J^\Gamma + 1, J]} |A_j| \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j,$$

qui sont satisfaites grâce à (7.11), (7.12) et (7.14). D'autre part, on dénombre  $2J$  inconnues de vitesse  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  et  $I + K$  inconnues pour la pression  $(\pi_i^T, \pi_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$ , soit en tout

$2J + I + K$  inconnues et autant d'équations indépendantes. Il reste à prouver l'injectivité du système. Supposons que  $\mathbf{f}_j^D = 0$ ,  $\forall j \in [1, J]$ . En prenant le produit scalaire de l'équation (7.10) avec  $\mathbf{u}_j$ ,  $\forall j \notin \Gamma$ , puis avec  $\mathbf{u}_j = 0$ ,  $\forall j \in \Gamma$  (c'est à dire satisfaisant (7.12) et (7.14)), nous pouvons écrire en appliquant (7.15) :

$$\left[ \nu (\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_j - \nu (\nabla_h^D \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_j + (\nabla_h^D \pi)_j \right] \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J].$$

En multipliant les équations précédentes par  $|D_j|$  et en sommant sur tous les  $j \in [1, J]$ , nous obtenons par définition du produit scalaire (2.3) :

$$-\nu (\nabla_h^D \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{u})_D + \nu (\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \mathbf{u})_D + (\nabla_h^D \pi, \mathbf{u})_D = 0.$$

Ensuite, en appliquant les formules de Green discrètes (2.13) et (2.14) à la ligne précédente avec l'équation (7.12) et  $\mathbf{f}_j^D = 0$ , l'égalité précédente se réécrit

$$\nu (\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u}, \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{T,P} + \nu (\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u}, \nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{T,P} - (\pi, \nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{T,P} = 0.$$

Puisque  $(\nabla_h^{T,P} \cdot \mathbf{u})_{i,k} = 0$ ,  $\forall i \in [1, I], k \in [1, K]$ , cela implique que  $(\nabla_h^{T,P} \times \mathbf{u})_{i,k} = 0$ ,  $\forall i \in [1, I], k \in [1, K]$ . D'autre part, la condition aux limites (7.12) implique que  $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$ ,  $\forall j \in [J - J^\Gamma + 1, J]$ . Alors, nous obtenons un problème Div-Rot homogène pour  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  et il découle du chapitre 3 (proposition 3.2) que

$$\mathbf{u}_j = 0, \quad \forall j \in [1, J]. \quad (7.16)$$

Puisque  $\mathbf{u}_j = 0$  sur toutes les cellules-diamants, l'équation (7.10) donne  $(\nabla_h^D \pi)_j = 0$  pour toutes les cellules-diamants intérieures, ce qui, associé à (2.7), implique que

$$\pi_{i_{2(j)}}^T = \pi_{i_{1(j)}}^T \text{ et } \pi_{k_{2(j)}}^P = \pi_{k_{1(j)}}^P, \quad \forall j \in [1, J - J^\Gamma]. \quad (7.17)$$

En d'autres termes, tous les  $\pi_i^T$  (resp.  $\pi_k^P$ ) sont égaux à la même constante  $c^T$  (resp.  $c^P$ ) puisque l'hypothèse selon laquelle les cellules primales frontières  $T_i$  ont seulement une arête appartenant à la frontière (Hyp. 7.1) assure que les noeuds frontières  $S_k$  sont sommets d'au moins une cellule-diamant intérieure.

Finalement, l'équation (7.13) nous permet de conclure :

$$\forall i \in [1, I], \pi_i^T = 0 \text{ et } \forall k \in [1, K], \pi_k^P = 0. \quad (7.18)$$

□

Par conséquent,  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  et  $(\pi_i^T, \pi_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  sont la solution approchée du problème

(7.7). Cependant, pour résoudre le problème (7.1), nous avons besoin d'approcher la pression  $p$ . Ainsi, une fois que  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  et  $(\pi_i^T, \pi_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  ont été calculés, nous pouvons déduire, en deux étapes, l'approximation  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  de  $p$ .

**Étape 1 :** nous calculons les  $(\tilde{p}_i^T, \tilde{p}_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  intermédiaires par la formule  $p = \pi - \frac{\mathbf{u}^2}{2}$ . Pour éviter les problèmes de définition entre  $\pi$  (défini sur les cellules primales et duales) et  $\mathbf{u}$  (défini sur les cellules-diamants), nous avons besoin des formules de quadrature suivantes pour calculer  $\tilde{\mathbf{u}}$  sur les cellules primales et duales d'après  $(\mathbf{u}_j)_{j \in [1, J]}$  :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^T = \frac{\sum_{j \in V(i)} \mathbf{u}_j}{\text{Card}\{V(i)\}} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_k^P = \frac{\sum_{j \in E(k)} \mathbf{u}_j}{\text{Card}\{E(k)\}},$$

où  $\text{Card}\{V(i)\}$  (resp.  $\text{Card}\{E(k)\}$ ) est le nombre d'éléments de l'ensemble fini  $V(i)$  (resp.  $E(k)$ ) défini en section 2.1.4.

Maintenant, nous pouvons calculer les  $(\tilde{p}_i^T, \tilde{p}_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  intermédiaires de la manière suivante :

$$\tilde{p}_i^T = \pi_i^T - \frac{(\tilde{\mathbf{u}}_i^T)^2}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_k^P = \pi_k^P - \frac{(\tilde{\mathbf{u}}_k^P)^2}{2}. \quad (7.19)$$

**Étape 2 :** nous projetons les valeurs  $(\tilde{p}_i^T, \tilde{p}_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  définies par (7.19) de telle sorte que les inconnues de pression  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  sont calculées par les deux formules :

$$p_i^T = \tilde{p}_i^T - \frac{\sum_{i \in [1, I]} |T_i| \tilde{p}_i^T}{\sum_{i \in [1, I]} |T_i|} \quad \text{et} \quad p_k^P = \tilde{p}_k^P - \frac{\sum_{k \in [1, K]} |P_k| \tilde{p}_k^P}{\sum_{k \in [1, K]} |P_k|}.$$

Ainsi, les inconnues de pression  $(p_i^T, p_k^P)_{i \in [1, I], k \in [1, K]}$  satisfont

$$\sum_{i \in [1, I]} |T_i| p_i^T = \sum_{k \in [1, K]} |P_k| p_k^P = 0. \quad (7.20)$$

### 7.2.2 Écriture des matrices

Dans ce qui suit, nous donnons les matrices  $A$ ,  $\tilde{B}$  et  $B^T$  associées à (7.10)–(7.12), et qui composent le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ \tilde{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons que, par définition de la formule de Green (2.13), les opérateurs  $-\nabla_h^{T,P}$  et  $\nabla_h^D$  sont adjoints quand  $\mathbf{u}_j = 0$ ,  $\forall j \in \Gamma$ . Cependant, le terme de bord de (2.13) n'est pas nul en général, ce qui implique que  $B^T$  n'est pas exactement la transposée de  $\tilde{B}$ .

Pour préconditionner, nous allons prendre en compte les poids  $|D_j|$  (resp.  $\frac{-|T_i|}{2}$  et  $\frac{-|P_k|}{2}$ ) dans  $A$  et  $B^T$  (resp. dans  $\tilde{B}$ ) des produits scalaires de la section 2.1.5 de la manière suivante :

**Définition 7.1** La matrice  $A$  de taille  $2J \times 2J$  est définie par  $A = \nu L + N$  avec

$$(L\bullet)_j = \begin{cases} |D_j| \left[ (\nabla_h^D \times \nabla_h^{T,P} \times \bullet)_j - (\nabla_h^D \nabla_h^{T,P} \cdot \bullet)_j \right] & , \forall j \notin \Gamma, \\ |D_j| \bullet_j & , \forall j \in \Gamma, \end{cases} \quad (7.21)$$

et

$$(N\bullet)_j = \begin{cases} |D_j| (\nabla \times \mathbf{u}_G)|_{D_j} (-\bullet_{jy}, \bullet_{jx})^T & , \forall j \notin \Gamma, \\ 0 & , \forall j \in \Gamma. \end{cases} \quad (7.22)$$

La matrice  $\tilde{B}$  de taille  $(I + K) \times 2J$  est définie par

$$(\tilde{B}\bullet)_l = \begin{cases} \frac{-|T_i|}{2} (\nabla_h^T \cdot \bullet)_i & , \text{ si } i = l \in [1, I], \\ \frac{-|P_k|}{2} (\nabla_h^P \cdot \bullet)_k & , \text{ si } k = l - I \in [1, K]. \end{cases} \quad (7.23)$$

La matrice  $B^T$  de taille  $2J \times (I + K)$  est définie par

$$(B^T\bullet)_j = \begin{cases} |D_j| (\nabla_h^D \bullet)_j & , \forall j \notin \Gamma, \\ 0 & , \forall j \in \Gamma. \end{cases} \quad (7.24)$$

De la même manière, nous définissons le vecteur  $\mathbf{F}$  en tenant compte des poids  $|D_j|$  :

**Définition 7.2** Le vecteur  $\mathbf{F}$  de taille  $2J$  est défini par

$$(\mathbf{F}\bullet)_j = \begin{cases} |D_j| \mathbf{f}_j & , \forall j \notin \Gamma, \\ 0 & , \forall j \in \Gamma. \end{cases} \quad (7.25)$$

**Remarque 7.2** Lorsque  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \neq 0$  au bord et  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  dans  $\Omega$  (voir le cas test de la cavité entraînée par exemple), pour résoudre le problème d'Oseen, nous effectuons un relèvement, ce qui revient à poser  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}$  qui est nul au bord et dans ce cas,  $\tilde{B}\mathbf{u}_0 = B\mathbf{u}_0$  qui n'est pas nul en général. Ainsi, par un changement de variable, résoudre le problème d'Oseen revient à résoudre un problème de point-selle avec un second membre  $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{g})$  perturbé par les conditions inhomogènes :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Dans la suite, nous allons étudier le problème de point-selle suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ g \end{pmatrix}, \quad (7.27)$$

avec  $\mathbf{u}$  pas nécessairement nul au bord et  $g$  non nul en général.

### 7.2.3 Problème non-linéaire

Pour les itérations non-linéaires, nous allons utiliser la méthode de quasi-Newton introduite par Turek [105] appelée "adaptative fixed point defect correction method" et appliquée par D. Jennequin dans sa thèse [70]. Turek et D. Jennequin ont observé que cette méthode était robuste et efficace la plupart du temps. De plus, elle est facile à implémenter. Une itération est constituée des cinq points décrits ci-dessous.

On suppose  $\mathbf{u}_{n-1}, \omega_{n-2}$  et  $p_{n-1}$  donnés et on procède de la façon suivante :

1. On calcule le résidu non linéaire

$$\begin{pmatrix} R_{n-1} \\ S_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\mathbf{u}_{n-1}) \mathbf{u}_{n-1} + B^T p_{n-1} - \mathbf{F} \\ B\mathbf{u}_{n-1} - g \end{pmatrix}.$$

2. On résout

$$\begin{pmatrix} A(\mathbf{u}_{n-1}) & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n-1} \\ S_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. On assemble la matrice  $M_{n-1} = A(\mathbf{u}_{n-1} - \omega_{n-2}\mathbf{w})$ .

4. On calcule le paramètre optimal  $\omega_{n-1}$  qui minimise

$$\left\| \begin{pmatrix} M_{n-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} - \omega \mathbf{w} \\ p_{n-1} - \omega z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ g \end{pmatrix} \right\|^2$$

par la formule

$$\omega_{n-1} = - \frac{\left( \begin{pmatrix} M_{n-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ g \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{n-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} \right)_2}{\left( \begin{pmatrix} M_{n-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M_{n-1} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ z \end{pmatrix} \right)_2},$$

où  $(\cdot, \cdot)_2$  est la produit scalaire euclidien.

5. On calcule  $\mathbf{u}_n, p_n$  par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix} - \omega_{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ z \end{pmatrix}.$$

TAB. 7.1 – Algorithme non-linéaire.

Le problème de l'étape 2 est résolu par l'algorithme du Bicgstab, décrit dans la table 7.2, avec une tolérance relative de  $10^{-1}$ . Nous arrêtons les itérations non-linéaires lorsque le résidu relatif est plus petit que  $10^{-8}$ . Nous démarrons de la solution initiale  $\mathbf{u} = 0$ ,  $p = 0$  pour résoudre les équations de Navier-Stokes avec  $Re = 1$ . Ensuite, nous partons du résultat obtenu lorsque  $Re = 1$  pour résoudre le problème avec  $Re = 10$ , et ainsi de suite.

## 7.3 Préconditionnement du problème de point-selle

### 7.3.1 La méthode d'Uzawa

Le problème de point-selle

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ g \end{pmatrix}$$

est équivalent à la résolution du système linéaire

$$A\mathbf{u} + B^T p = \mathbf{F} \tag{7.28a}$$

$$-BA^{-1}B^T p = g - BA^{-1}\mathbf{F} \tag{7.28b}$$

Nous appelons méthode d'Uzawa, toute méthode itérative appliquée à l'équation (7.28b). Pour accélérer la convergence, nous utilisons l'algorithme du Bicgstab (voir Table 7.2). Cet algorithme résout (7.28b) préconditionné à droite par  $\tilde{S}$ . Chacune des multiplications par  $\tilde{S}^{-1}$  et  $A^{-1}$  est réalisée soit par un solveur direct de MUMPS (type factorisation LU complète) dans une première partie, soit par l'algorithme Bicgstab de SPARSKIT2 préconditionné par une factorisation LU incomplète dans une deuxième partie.

Ensuite, nous devons trouver un préconditionneur pour le complément de Schur  $S = -BA^{-1}B^T$ . Cette question est plus difficile et quelques réponses sont données dans la section suivante.

### 7.3.2 Préconditionneurs

En utilisant la définition des produits scalaires (2.2) et (2.3), nous pouvons définir les analogues en volumes finis de la matrice de masse sur la pression et de la matrice de masse sur la vitesse, définies pour les méthodes d'éléments finis. Nous notons  $Q$  la matrice de masse

```

Soient  $\Phi = g - BA^{-1}\mathbf{F}$  et  $S = -BA^{-1}B^T$ .

Donnée initiale :  $p_0$ 
 $r = \Phi - Sp_0$ ;  $\tilde{r} = r$ ;  $\omega = 1$ 
 $resid = \|r\|/\|\Phi\|$ 
for  $i=1$ , maxiter
     $\rho_1 = (\tilde{r}, r)$  if  $\rho_1 = 0$ , breakdown, EXIT, end if
    if  $i = 1$  then  $x = r$ 
    else
         $\beta = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\alpha}{\omega}$ 
         $x = r + \beta(x - \omega v)$ 
    end if
     $\hat{p} = \tilde{S}^{-1}x$ 
     $\mathbf{z} = A^{-1}B^T\hat{p}$ 
     $v = B\mathbf{z}$ 
     $\alpha = \frac{\rho_1}{(\tilde{r}, v)}$ 
     $s = r - \alpha v$ 
    if  $\|s\| < \text{tol } \|\Phi\|$ ,  $p = p + \alpha\hat{p}$ ,  $\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{F} - B^Tp)$ , return  $p$  and  $\mathbf{u}$ , end if
     $\hat{s} = \tilde{S}^{-1}s$ 
     $\mathbf{q} = A^{-1}B^T\hat{s}$ 
     $t = B\mathbf{q}$ 
     $\omega = \frac{(\hat{s}, t)}{(t, t)}$ 
     $p = p + \alpha\hat{p} + \omega\hat{s}$ 
     $r = s - \omega t$ 
     $\rho_2 = \rho_1$ 
    if  $\|r\| < \text{tol } \|\Phi\|$ ,  $\mathbf{u} = A^{-1}(\mathbf{F} - B^Tp)$ , return  $p$  and  $\mathbf{u}$ , end if
    if  $\omega = 0$ , breakdown, EXIT, end if
end for

```

TAB. 7.2 – Pseudo-code pour l'algorithme du Bicgstab préconditionné.

sur la pression définie sur les cellules primales et duales par

$$\forall 1 \leq l \leq I + K, \quad Q_{l,l} = \begin{cases} |T_i| & \text{si } i = l \in [1, I], \\ |P_k| & \text{si } k = l - I \in [1, K]. \end{cases}$$

La matrice de masse sur la vitesse, notée  $X$  et associée à un champ de vecteurs, est définie sur les cellules-diamants par

$$\forall 1 \leq l \leq 2J, \quad X_{l,l} = \begin{cases} |D_j| & \text{si } j = l \in [1, J], \\ |D_j| & \text{si } j = l - J \in [1, J]. \end{cases}$$

Dans la littérature, trois sortes de préconditionneurs  $\tilde{S}^{-1}$  pour le complément de Schur  $S = -BA^{-1}B^T$  peuvent être appliqués à notre problème :

- Le préconditionneur SIMPLE :  $\tilde{S}^{-1} = -(B\hat{A}^{-1}B^T)^{-1}$  où  $\hat{A}$  est une approximation de  $A$  (en pratique, nous prendrons la matrice diagonale de  $A$ ). Notons que, pour résoudre un problème d'Oseen, on calcule  $B\hat{A}^{-1}B^T$  une bonne fois pour toutes au début de l'algorithme, et il faudra inverser cette matrice deux fois par itération (voir la table 7.2). C'est le préconditionneur le moins coûteux des trois.
- Les commutateurs approchés (appelés méthode BFBt, qui est la notation introduite par Elman [45]) :

$$\tilde{S}^{-1} = -(BM_2^{-1}B^T)^{-1}(BM_2^{-1}AM_2^{-1}B^T)(BM_2^{-1}B^T)^{-1},$$

où les principaux candidats pour  $M_2$  sont la matrice identité  $I$ , la matrice de masse sur la vitesse  $X$  ou la matrice diagonale de  $A$ . Notons que, pour résoudre un problème d'Oseen, on calcule  $BM_2^{-1}B^T$  une bonne fois pour toutes au début de l'algorithme, et il faudra inverser cette matrice quatre fois par itération (voir la table 7.2). Ce préconditionneur est plus coûteux que SIMPLE.

- Le préconditionneur d'Olshanskii [89] :

$$\tilde{S}^{-1} = -Q^{-1}BL^{-1}AL^{-1}B^TQ^{-1},$$

où  $L$  est l'opérateur Laplacien (7.21) avec des conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière. Notons que, pour résoudre un problème d'Oseen, il faudra inverser la matrice  $L$  quatre fois par itération (voir la table 7.2). Ce préconditionneur est plus coûteux que SIMPLE.

Elman [44] montre les performances de la méthode BFBt sur le schéma aux différences finies MAC avec des conditions aux limites de Dirichlet. Pour une vitesse de convection



$\mathbf{u}_G = (1, 2)$  (donc constante), le nombre d'itérations nécessaires pour qu'un GMRES, préconditionné à droite par BFBt converge avec une tolérance relative de  $10^{-6}$ , est indépendant de la viscosité  $\nu$ . En revanche, si la vitesse de convection  $\mathbf{u}_G = (2y(1-x^2), -2x(1-y^2))$  (tourbillon circulaire), alors le nombre d'itérations dépend légèrement de  $\nu$ . Dans les deux cas, le nombre d'itérations augmente légèrement lorsque l'on raffine, à une vitesse de  $h^{-1/2}$ , où  $h$  est le pas du maillage. D'autre part, Olshanskii et al. présentent une comparaison intéressante entre leur préconditionneur et le préconditionneur BFBt d'Elman. Pour cela, ils utilisent un Bicgstab préconditionné (à droite) et indiquent le nombre d'itérations nécessaires pour avoir la convergence avec une tolérance de  $10^{-8}$ , sur des cas tests en éléments finis. Pour une discrétisation par éléments finis isoP2-P1, dans le cadre de la cavité 2D linéarisée ( $\mathbf{u}_G$  étant un tourbillon), il apparaît que le nombre d'itérations, avec le préconditionneur d'Olshanskii, est indépendant de  $h$  pour des nombres de Reynolds modérés. D'autre part, le nombre d'itérations est encore indépendant de  $h$  lorsque la vitesse de convection  $\mathbf{u}_G$  est constante ou donnée par un tourbillon, avec une discrétisation par des éléments finis isoP2-P0. Pour la méthode BFBt, cette propriété est vérifiée seulement si la vitesse de convection  $\mathbf{u}_G$  est constante, la viscosité faible et pour une discrétisation en éléments finis isoP2-P1.

## 7.4 Résultats numériques

Dans un premier temps, nous illustrons les sections 7.2.1 et 7.2.3 avec des conditions de Dirichlet sur  $\mathbf{u}$ . Le domaine de calcul est  $\Omega_1 = ]0, 1[^2$  ou  $\Omega_2 = ]-1/2; 1/2[^2$  et les données et conditions aux limites sont choisies de telle sorte que la solution exacte est donnée par

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos(\pi y) \\ x \sin(\pi y) + \cos(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_1 = xy \exp(x) \cos(\pi y), \quad (7.29)$$

ou

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} -2000y(y-1)(2y-1)x^2(x-1)^2 \\ 2000x(x-1)(2x-1)y^2(y-1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{p}_2 = 100(x^2 + y^2) + c, \quad (7.30)$$

où  $c$  est une constante choisie de telle sorte que  $\int_{\Omega} \hat{p}_2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$ . Les deux premiers maillages de chacune des familles sont représentés sur les figures 5.4, 5.5 et 5.6 où nous notons pour certains d'entre eux un raffinement des cellules primales situées au bord. Nous nous sommes ainsi intéressés ici à la convergence de  $p$ ,  $\nabla p$  (ou  $\pi$ ,  $\nabla \pi$ , le cas échéant),  $\omega$  et  $\nabla \omega$ , que nous

avons mesurée en calculant les erreurs suivantes

$$(e0p)^2(h) := \frac{\frac{1}{2} (\sum_i |T_i| (p_i^T - (\Pi\hat{p})_i^T)^2 + \sum_k |P_k| (p_k^P - (\Pi\hat{p})_k^P)^2)}{\frac{1}{2} (\sum_i |T_i| ((\Pi\hat{p})_i^T)^2 + \sum_k |P_k| ((\Pi\hat{p})_k^P)^2)},$$

où  $\forall i \in [1, I]$ ,  $(\Pi\hat{p})_i^T = \hat{p}(G_i)$  et  $\forall k \in [1, K]$ ,  $(\Pi\hat{p})_k^P = \hat{p}(S_k)$ , et

$$(e1p)^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |(\nabla_h^D p)_j - (\Pi\nabla\hat{p})_j|^2}{\sum_j |D_j| |(\Pi\nabla\hat{p})_j|^2},$$

où  $\forall j \in [1, J]$ ,  $(\Pi\nabla\hat{p})_j = (\nabla\hat{p})(B_j)$ , où  $B_j$  est le centre de gravité de la cellule-diamant  $D_j$ .

Les mêmes définitions sont utilisées pour  $\omega$  (resp.  $\pi$ ) en remplaçant  $p$  par  $\omega$  (resp.  $\pi$ ) dans les formules précédentes. L'erreur discrète relative  $L^2$  sur les cellules-diamants pour la vitesse est mesurée par la formule suivante :

$$e^2(h) := \frac{\sum_j |D_j| |\mathbf{u}_j - (\Pi\hat{\mathbf{u}})_j|^2}{\sum_j |D_j| |(\Pi\hat{\mathbf{u}})_j|^2},$$

où  $(\Pi\hat{\mathbf{u}})_j$  est la valeur de la solution analytique  $\hat{\mathbf{u}}$  au milieu de l'arête  $A_j$  (noté  $M_j$ ) :

$$\forall j \in [1, J], (\Pi\hat{\mathbf{u}})_j = \hat{\mathbf{u}}(M_j).$$

D'autre part, quelques résultats numériques sur la cavité entraînée sont donnés pour illustrer la section 7.2.3. En particulier, nous donnons les lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour différents nombres de Reynolds, ainsi que les profils de vitesse en  $x = 0.5$  et  $y = 0.5$ .

Ensuite, nous illustrons la section 7.3 en fournissant les spectres des préconditionneurs, que l'on compare avec le spectre du complément de Schur. Les observations faites à partir de ces spectres nous permettent déjà d'en déduire le préconditionneur le plus performant en fonction de la viscosité. Ensuite, nous donnons le coût itératif et le temps de calcul (pour différentes factorisations des matrices  $A$ ,  $B$ ,  $B^T$  et  $\tilde{S}$  : complètes avec PETSC [11, 12, 13] et MUMPS [80] ; ILU1 et ILU0 avec SPARSKIT2 [100]) de l'algorithme du Bicgstab de la table 7.2, pour chacun des préconditionneurs  $\tilde{S}$  et ces résultats corroborent les observations faites à partir des spectres.

#### 7.4.1 Résultats numériques pour le problème d'Oseen

Supposons que  $(\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{p}_i)$ , avec  $i \in \{1, 2\}$ , est la solution du problème. Alors, nous choisissons la vitesse de convection  $\mathbf{u}_G$  de telle sorte que  $(\mathbf{u}_G)_j = \hat{\mathbf{u}}_i(M_j)$ , et nous rappelons que  $M_j$  est le milieu de l'arête  $A_j$ . Dans cette section, le problème d'Oseen est résolu par un Bicgstab préconditionné avec une tolérance de  $10^{-8}$ .

### Maillages triangulaires

Sur la famille de maillages triangulaires non-structurés de la figure 5.4, l'ordre de convergence semble être 2 pour la vitesse et au moins 1 pour la pression de Bernoulli et la vorticité, d'après la Fig. 7.1.

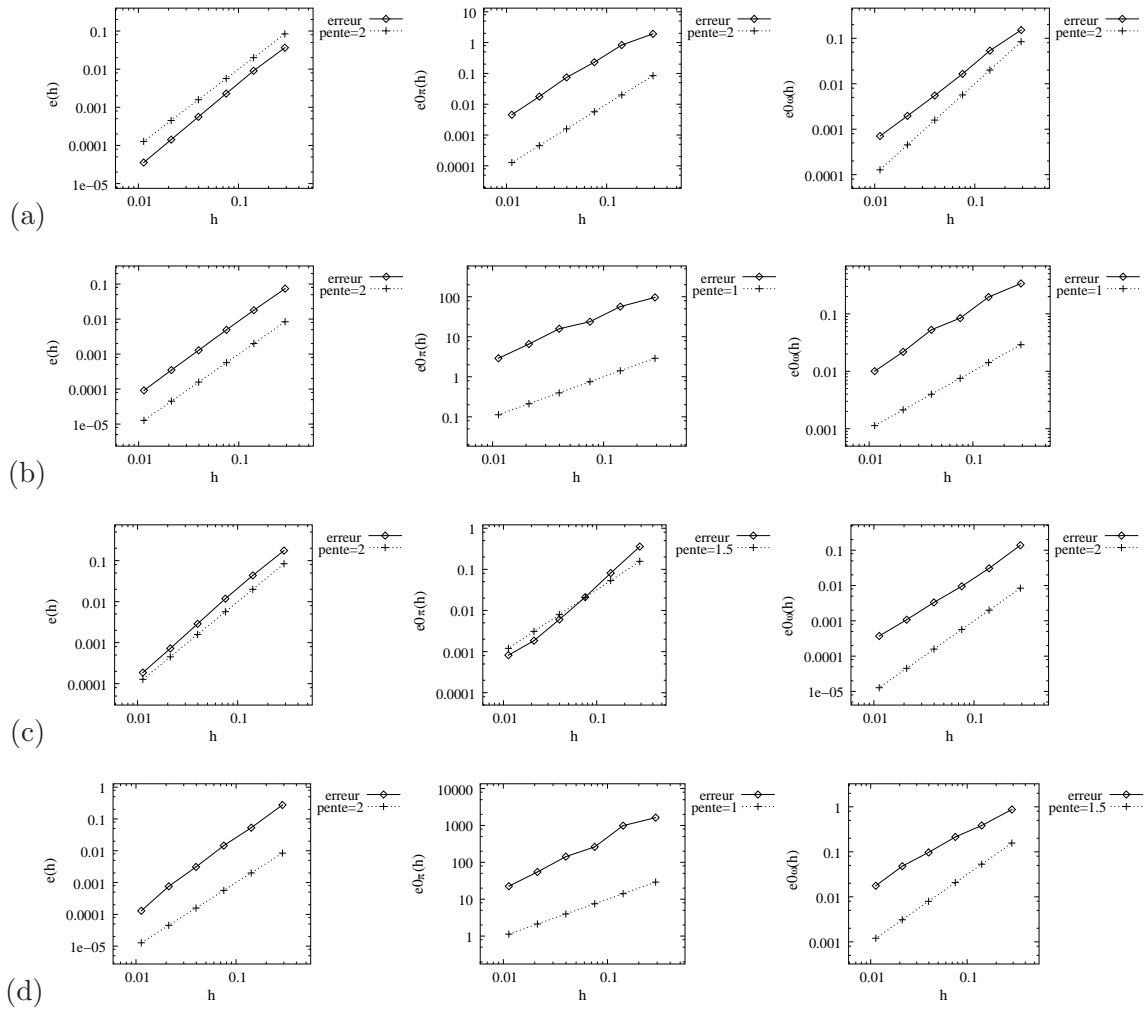


FIG. 7.1 – Convergence de la vitesse, de la pression de Bernoulli et de la vorticité pour le problème d'Oseen avec  $\nu = 1$  sur des maillages non structurés (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

### Maillages non-conformes

Sur la famille de maillages avec une non-conformité localisée de la figure 5.5, nous obtenons, d'après la Fig. 7.2, au moins de l'ordre 1.5 pour la vitesse et au moins de l'ordre 1 pour la pression de Bernoulli et pour la vorticité.

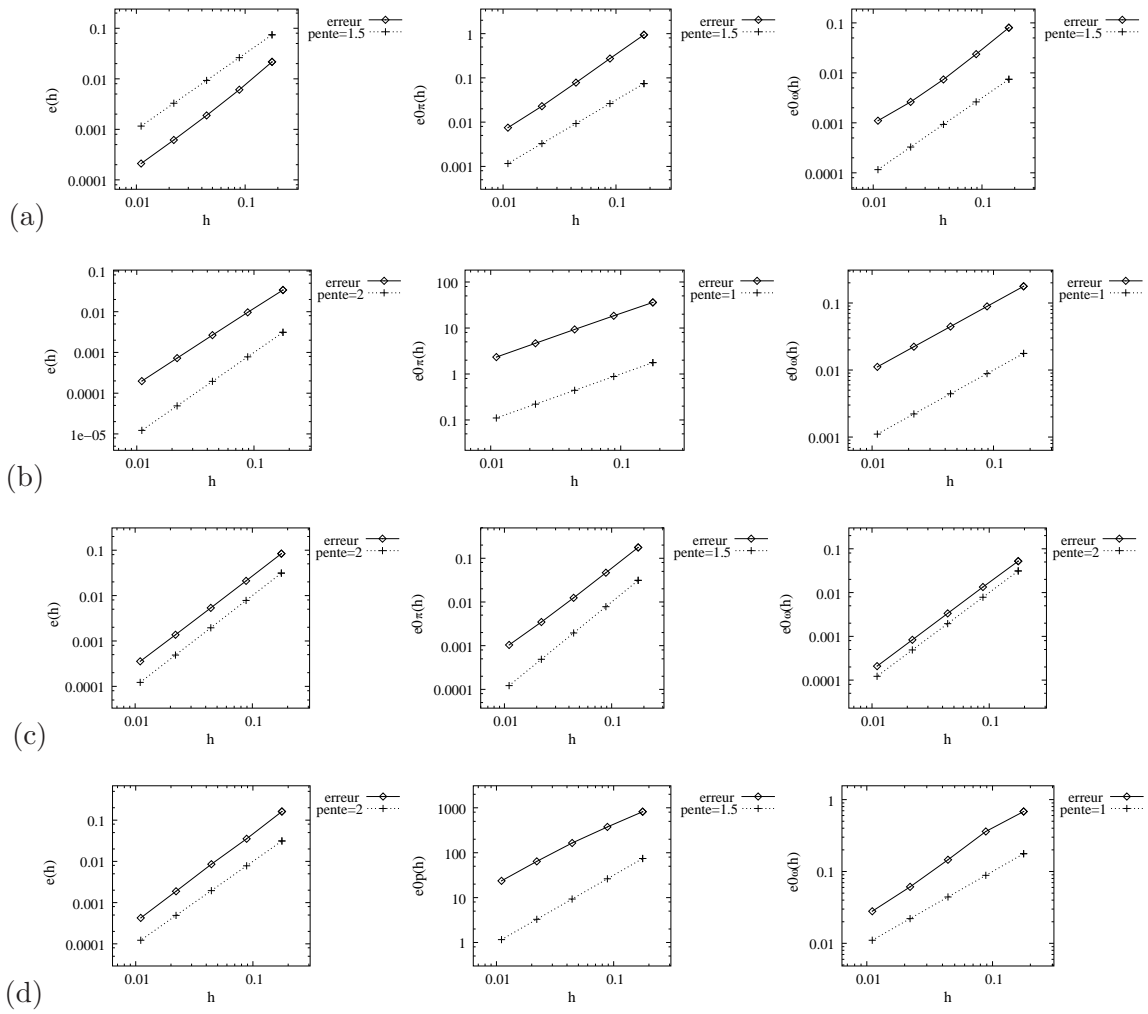


FIG. 7.2 – Convergence de la vitesse, de la pression de Bernoulli et de la vorticité pour le problème d'Oseen avec  $\nu = 1$  sur des maillages localement non-conformes (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ . (d)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_2$ .

### 7.4.2 Résultats numériques pour le problème de Navier-Stokes

Dans cette section, le problème de Navier-Stokes est résolu à l'aide de l'algorithme du Bicgstab préconditionné de la table 7.2, où nous rappelons que la tolérance choisie est  $10^{-8}$  tandis que la tolérance pour résoudre le problème d'Oseen à l'étape 2 de cet algorithme est  $10^{-1}$ .

#### Maillages triangulaires

Sur la famille de maillages triangulaires non-structurés de la figure 5.4, l'ordre de convergence semble être 2 pour la vitesse et au moins 1 pour la pression et la vorticité, d'après la Fig. 7.3.

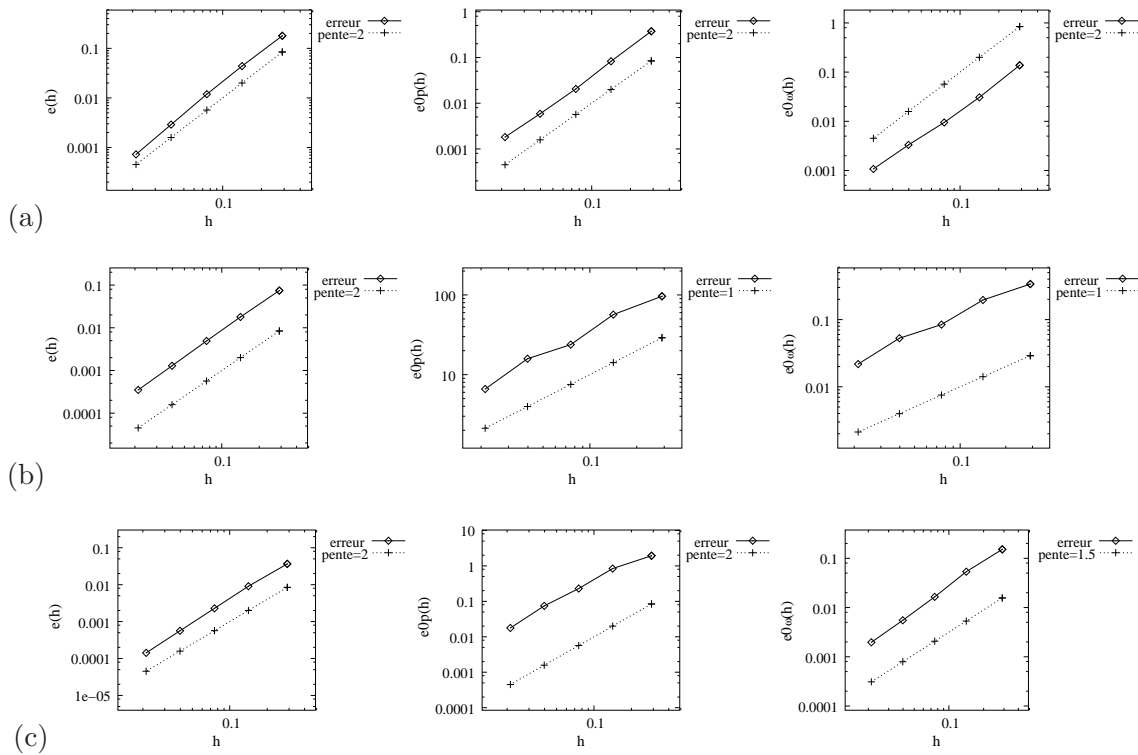


FIG. 7.3 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec  $\nu = 1$  sur des maillages non structurés (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ .

### Maillages non-conformes

Sur la famille de maillages avec une non-conformité localisée de la figure 5.5, nous obtenons, d'après la Fig. 7.4, au moins de l'ordre 1.5 pour la vitesse et au moins de l'ordre 1 pour la pression et pour la vorticité. Sur la famille de maillages non-conformes en damier de la figure

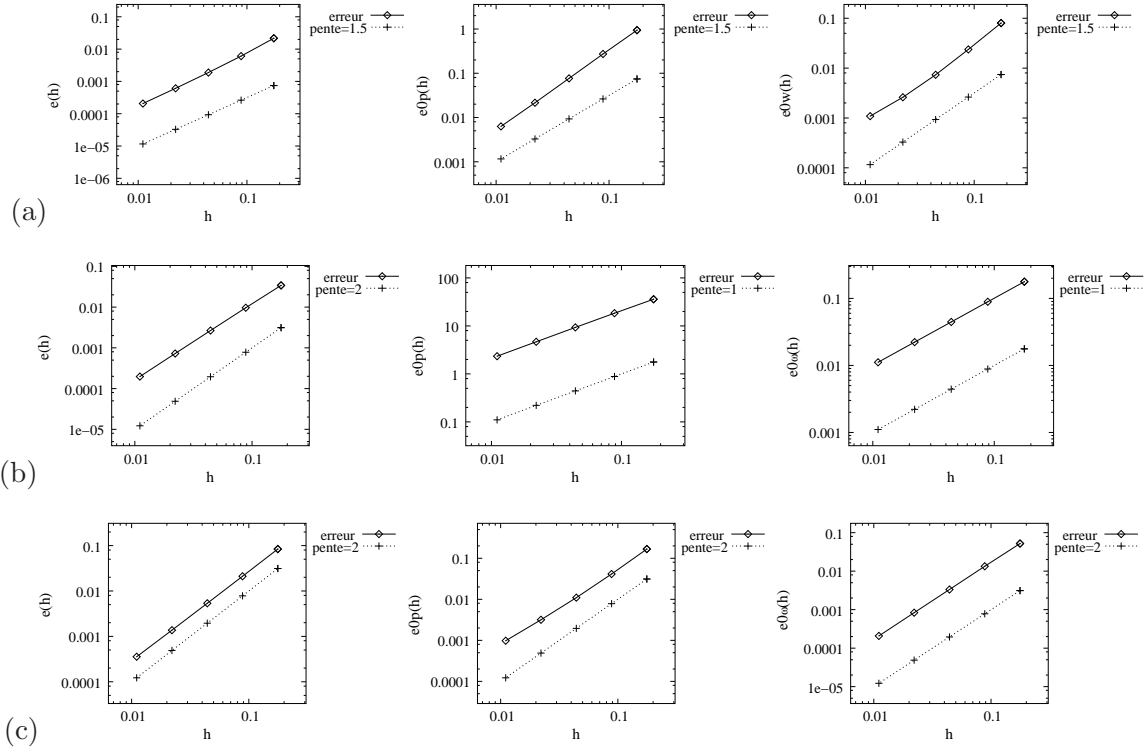


FIG. 7.4 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec  $\nu = 1$  sur des maillages raffinés localement (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ .

5.6, nous obtenons, d'après la Fig. 7.5, au moins de l'ordre 1 pour la vitesse et au moins de l'ordre 0.5 pour la pression et pour la vorticité.

### Cavité à paroi défilante

Dans cette section, nous supposons que  $\Omega = [0, 1]^2$  et que la paroi du haut se déplace à une vitesse  $\mathbf{u} = (1, 0)$ , tandis qu'on applique une condition de non-glissement  $\mathbf{u} = (0, 0)$  aux autres parois, et nous supposons de plus que  $\mathbf{F} = \mathbf{g} = 0$ .

## CHAPITRE 7. EXTENSION AU PROBLÈME DE NAVIER-STOKES ET PRÉCONDITIONNEMENT

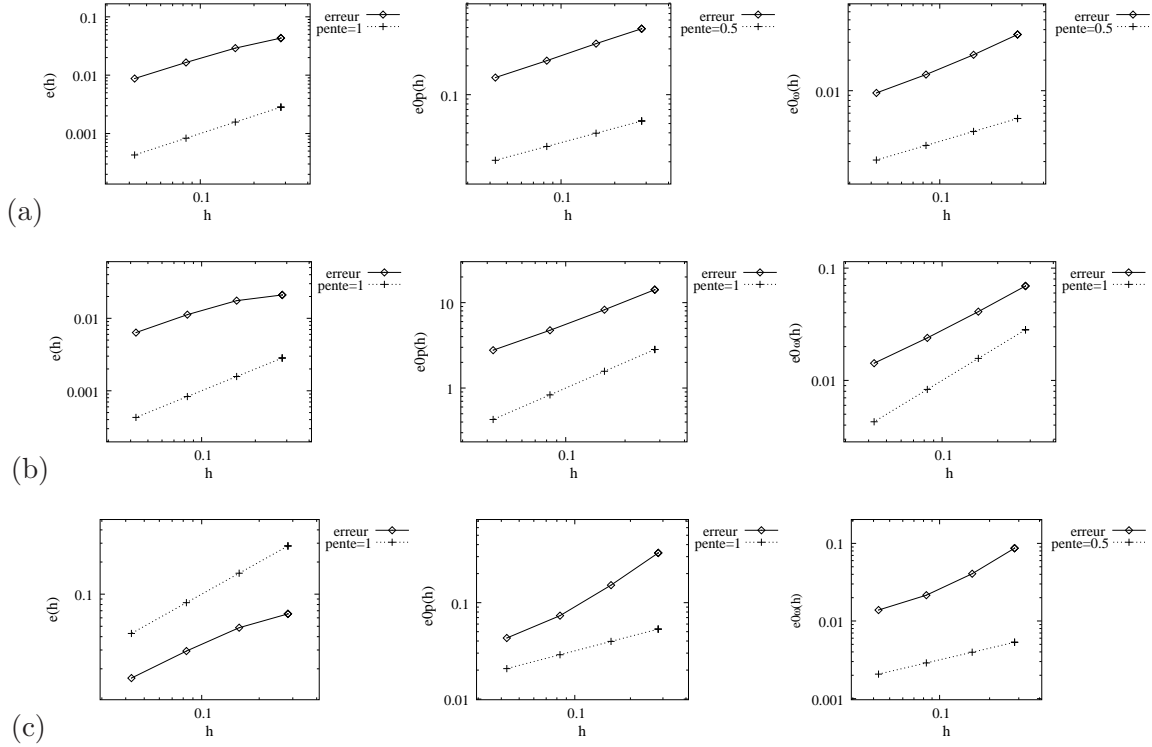


FIG. 7.5 – Convergence de la vitesse, de la pression et de la vorticité pour le problème de Navier-Stokes avec  $\nu = 1$  sur des maillages en damier (a)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_1$ . (b)  $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{p}_1)$  sur  $\Omega_2$ . (c)  $(\hat{\mathbf{u}}_2, \hat{p}_2)$  sur  $\Omega_1$ .

Les figures 7.6, 7.7 et 7.8 illustrent les lignes de niveaux de la pression  $p$ , de la vorticité  $\omega$  et de la fonction de courant  $\psi$  (calculée en résolvant  $\omega_{i,k}^{T,P} = (\nabla_h^{T,P} \times \nabla_h^D \times \psi)_{i,k}$  avec des conditions de Dirichlet homogènes  $\psi_{i_2(j)}^T = \psi_{k_2(j)}^P = \psi_{k_1(j)}^P = 0$ ) pour trois valeurs de la viscosité :  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$  et  $\nu = 0.02$ . Plus précisément, nous avons tracé 20, 1000 et 10000 lignes de niveaux, uniformément réparties entre la valeur minimale et la valeur maximale, respectivement pour la fonction de courant, la vorticité et la pression sur chacune des figures 7.6, 7.7 et 7.8. Lorsque  $\nu$  diminue, on remarque que le tourbillon de la fonction de courant s'éloigne de la droite d'équation  $x = 0.5$ , ce qui correspond aux observations habituelles. Ensuite, nous constatons sur la figure 7.9 que les profils selon  $y$  en  $x = 0.5$  et selon  $x$  en  $y = 0.5$  avec  $\nu = 1.0$  pour des grilles structurées  $32 \times 32$  et  $128 \times 128$  sont très proches.

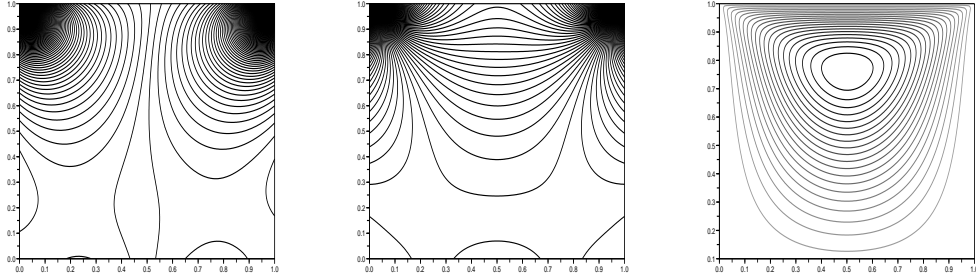


FIG. 7.6 – Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour  $\nu = 1$ .

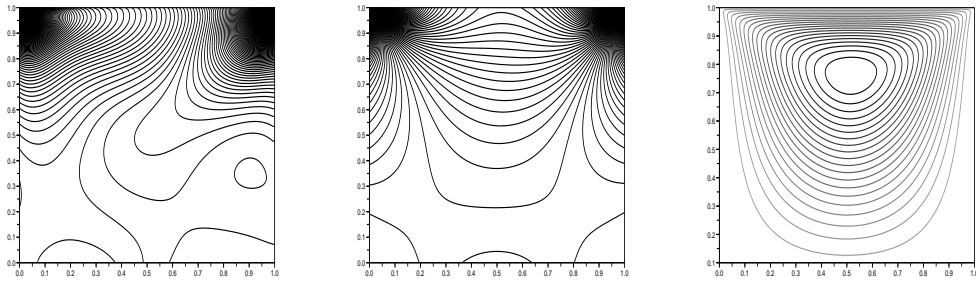


FIG. 7.7 – Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour  $\nu = 0.1$ .

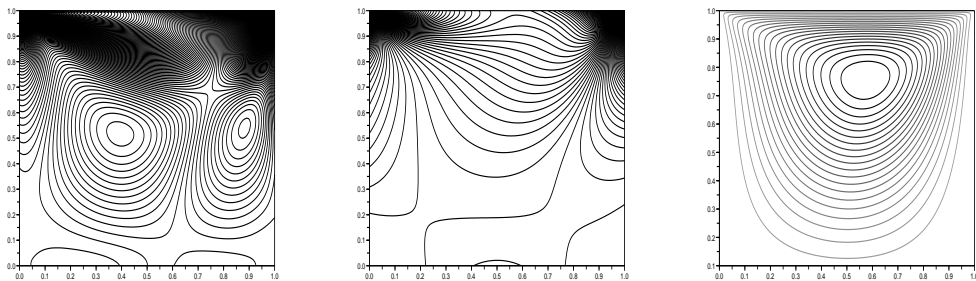


FIG. 7.8 – Lignes de niveaux de la pression, de la vorticité et de la fonction de courant pour  $\nu = 0.02$ .



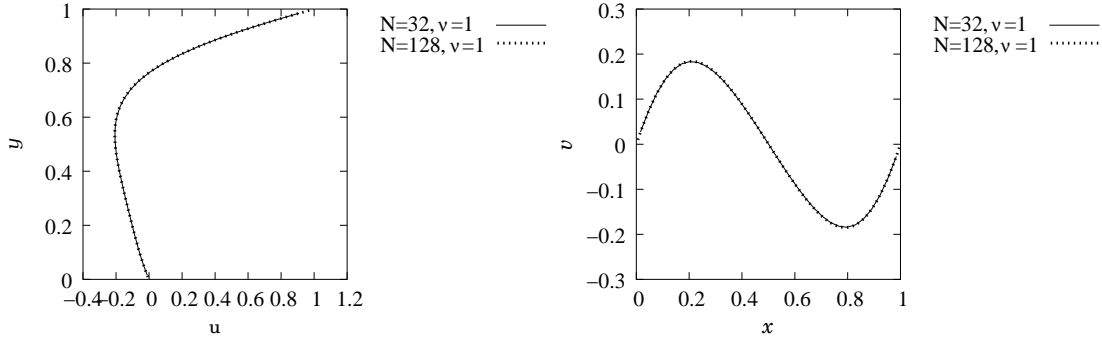


FIG. 7.9 – Profils selon  $y$  en  $x = 0.5$  et selon  $x$  en  $y = 0.5$  avec  $\nu = 1.0$  pour des grilles structurées  $32 \times 32$  et  $128 \times 128$ .

### 7.4.3 Résultats numériques pour le préconditionnement

#### Spectres

Dans cette section, le domaine de calculs est  $\Omega = [0, 1]^2$ . Chaque arête de  $\Omega$  est divisée en 20 sous-segments de longueurs égales et le domaine est maillé par une triangulation non-structurée. Nous nous intéressons au problème linéaire d'Oseen dont la vitesse de convection est donnée par

$$\mathbf{u}_G = \begin{pmatrix} 2(2y - 1)(1 - (2x - 1)^2) \\ -2(2x - 1)(1 - (2y - 1)^2) \end{pmatrix}.$$

A l'aide de Matlab, nous avons calculé les spectres du complément de Schur  $S = -BA^{-1}B^T$  ainsi que ceux des préconditionneurs d'Elman (pour  $M_2 = I$ ,  $M_2 = \text{diag}(A)$  et  $M_2 = X$ ), d'Olshanskii et SIMPLE, pour différentes viscosités telles que  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.01$  et  $\nu = 0.001$ . Ainsi, sur les figures 7.10, 7.12, 7.14 et 7.16, nous comparons les spectres obtenus, et de plus, nous donnons également, sur les figures 7.11, 7.13, 7.15 et 7.17, les spectres du complément de Schur préconditionné par chacun des préconditionneurs cités ci-dessus. Bien évidemment, plus le spectre d'un préconditionneur s'approche de celui du complément de Schur, meilleure est l'approximation. Il en résulte que la partie réelle des valeurs propres du complément de Schur préconditionné doit tendre vers 1 et que la partie imaginaire doit tendre vers 0. Numériquement, quand la partie réelle devient négative, la convergence vers une solution n'est plus possible. On constate donc, d'après les figures 7.11, 7.13, 7.15 et 7.17, pour une viscosité  $\nu = 1$ ,  $\nu = 0.1$  ou  $\nu = 0.01$ , un amas de valeurs propres dont la partie réelle est proche de 1 pour le préconditionneur d'Elman. De plus, le préconditionneur avec

$M_2 = X$  est un peu meilleur pour des viscosités grandes tandis que ceux avec  $M_2 = I$  et  $M_2 = \text{diag}(A)$  sont meilleurs pour des viscosités faibles. Dans les trois cas, la partie réelle de certaines valeurs propres est négative pour  $\nu = 0.001$ . D'autre part, la partie réelle des préconditionneurs d'Olshanskii et SIMPLE reste positive même pour  $\nu = 0.001$ , mais ils approchent nettement moins bien le complément de Schur que le préconditionneur d'Elman. Cependant, comme nous l'avons fait remarquer en le définissant, le préconditionneur SIMPLE est beaucoup moins coûteux que ceux d'Elman ou d'Olshanskii, c'est pourquoi cela fait tout de même de lui un bon candidat. Par contre, on peut éliminer le préconditionneur d'Olshanskii car ce préconditionneur est plus coûteux que SIMPLE et c'est clairement le moins performant des trois. Nous verrons dans la section suivante que les observations faites pour chacun des préconditionneurs sont confirmées par le coût itératif de l'algorithme du Bicgstab de la table 7.2. Enfin, nous donnons également le spectre du complément de Schur du problème de Stokes (donc sans partie convective) pour  $\nu = 1$  sur la figure 7.18(a), ainsi que son approximation par le préconditionneur d'Elman avec  $M_2 = I$  sur la figure 7.18(b). Remarquons que si l'on change la valeur de  $\nu$ , les valeurs propres du complément de Schur et du préconditionneur sont proportionnelles. Nous constatons sur la figure 7.19 que la partie réelle des valeurs propres du complément de Schur préconditionné par le préconditionneur d'Elman avec différents poids est très proche de 1, et lorsque  $M_2 = X$ , la partie imaginaire des valeurs propres est nulle. Autrement dit, le préconditionneur d'Elman avec  $M_2 = X$  est un excellent préconditionneur pour le problème de Stokes.

**Remarque 7.3** *En réalité, pour les spectres des préconditionneurs d'Olshanskii et SIMPLE, nous ne montrons pas toutes les valeurs propres sur les figures 7.10, 7.12, 7.14 et 7.16. En effet, la matrice du préconditionneur d'Olshanskii possède quelques valeurs réelles “élevées” (environs 47 pour  $\nu = 1$ , 4.7 pour  $\nu = 0.1$ , 0.47 pour  $\nu = 0.01$  et 0.037 pour  $\nu = 0.001$ ) par rapport à celles représentées ce qui rend la figure illisible puisqu'on observe alors un amas de valeurs propres près de l'axe imaginaire. Pour le préconditionneur SIMPLE, le amas de valeurs propres se situe cette fois près de l'axe réel avec quelques valeurs propres de partie imaginaire de grand module (environs  $2 \times 10^7$  pour  $\nu = 1$ ,  $2 \times 10^6$  pour  $\nu = 0.1$ ,  $2 \times 10^5$  pour  $\nu = 0.01$  et  $2 \times 10^4$  pour  $\nu = 0.001$ ). Nous avons donc fait un zoom sur ces amas de valeurs propres.*

Pour une viscosité  $\nu = 1$  sur une grille non-structurée  $20 \times 20$  :

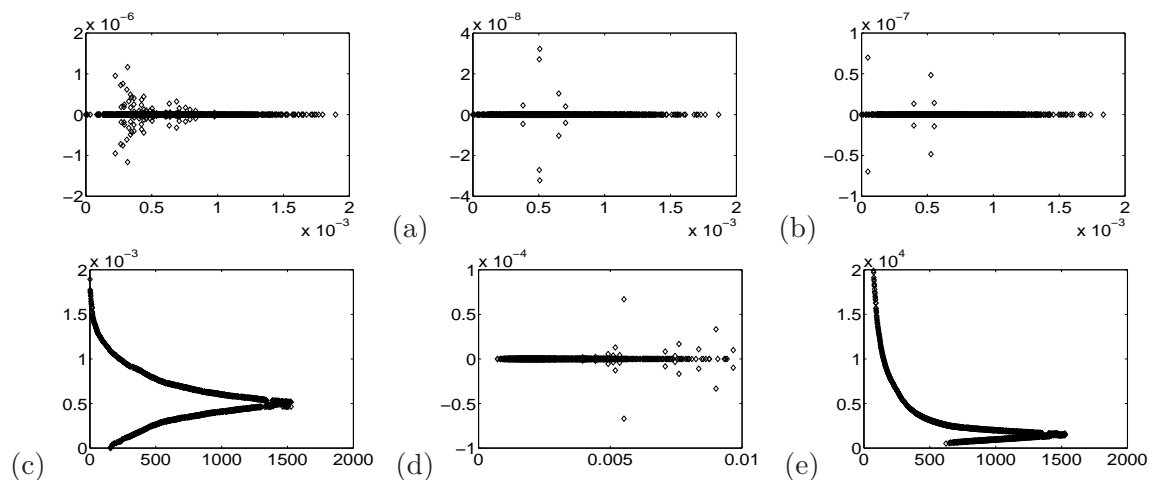


FIG. 7.10 –  $\nu = 1$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d’Olshanskii. (e) SIMPLE.

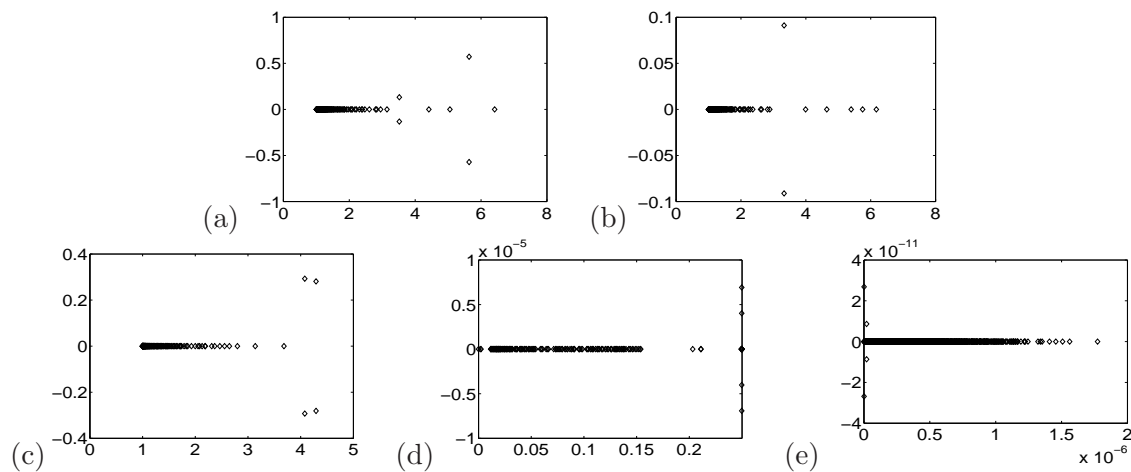


FIG. 7.11 –  $\nu = 1$ . Spectre du complément de Schur preconditionné par (a) Elman,  $M_2 = I$ . (b) Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman,  $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE.

Pour une viscosité  $\nu = 0.1$  sur une grille non-structurée  $20 \times 20$  :

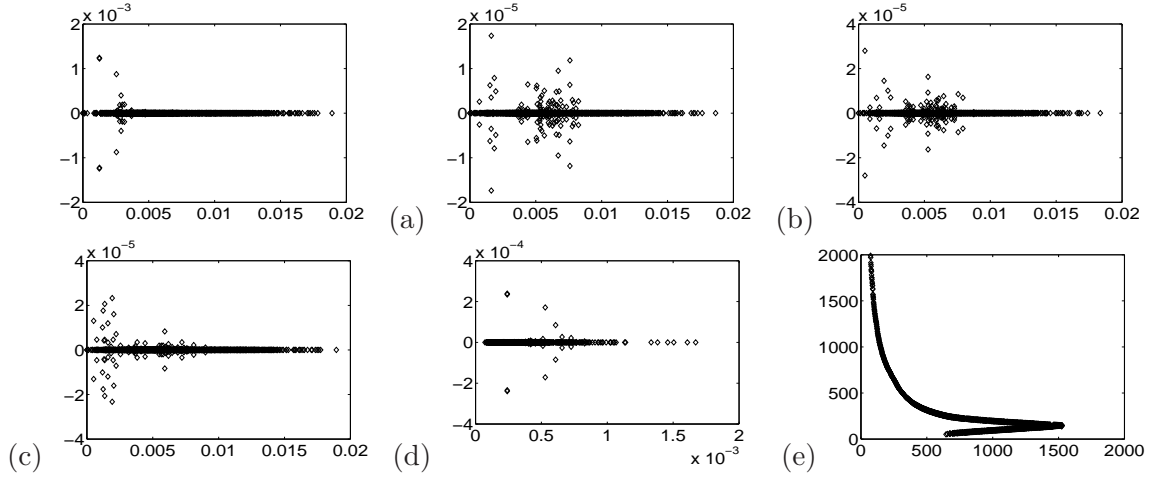


FIG. 7.12 –  $\nu = 0.1$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d’Olshanskii. (e) SIMPLE.

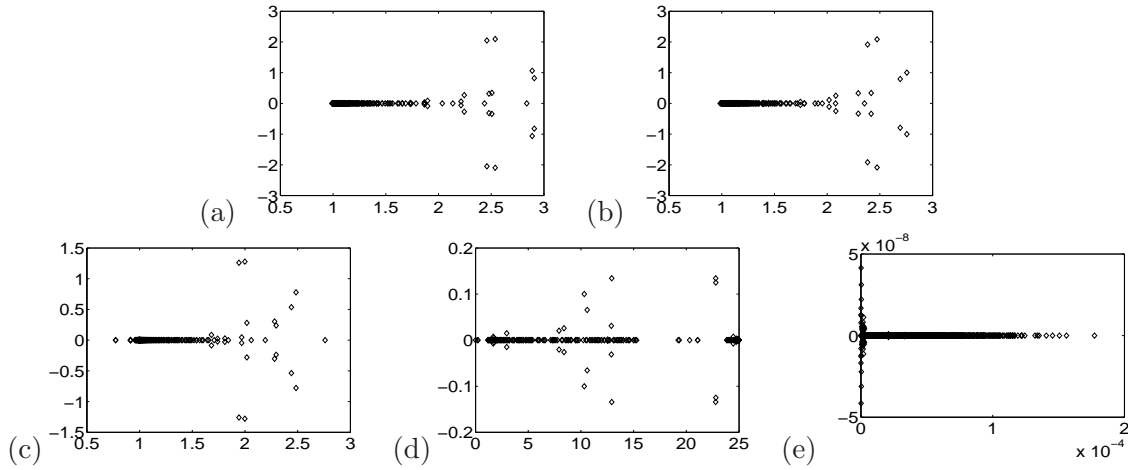


FIG. 7.13 –  $\nu = 0.1$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman,  $M_2 = I$ . (b) Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman,  $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE.

Pour une viscosité  $\nu = 0.01$  sur une grille non-structurée  $20 \times 20$  :

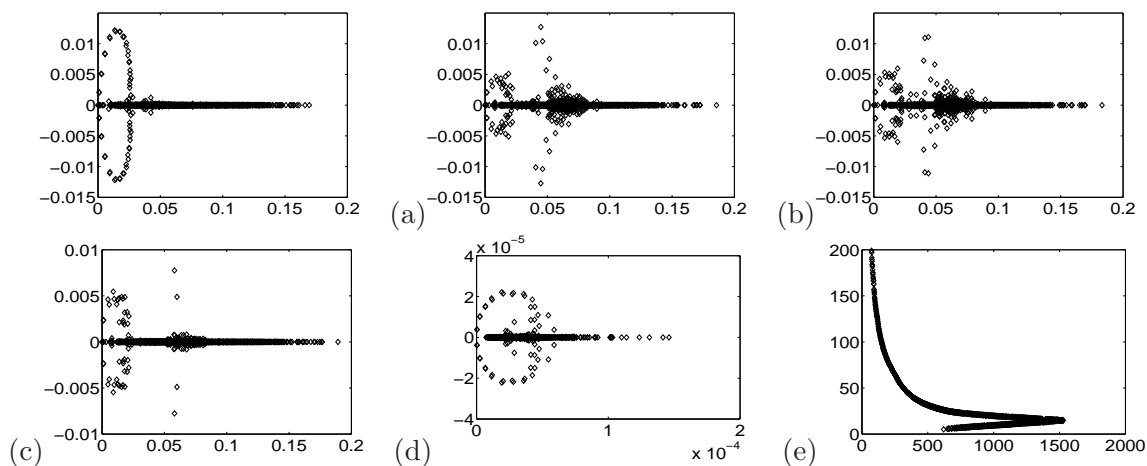


FIG. 7.14 –  $\nu = 0.01$ . En haut à gauche : spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d’Olshanskii. (e) SIMPLE.

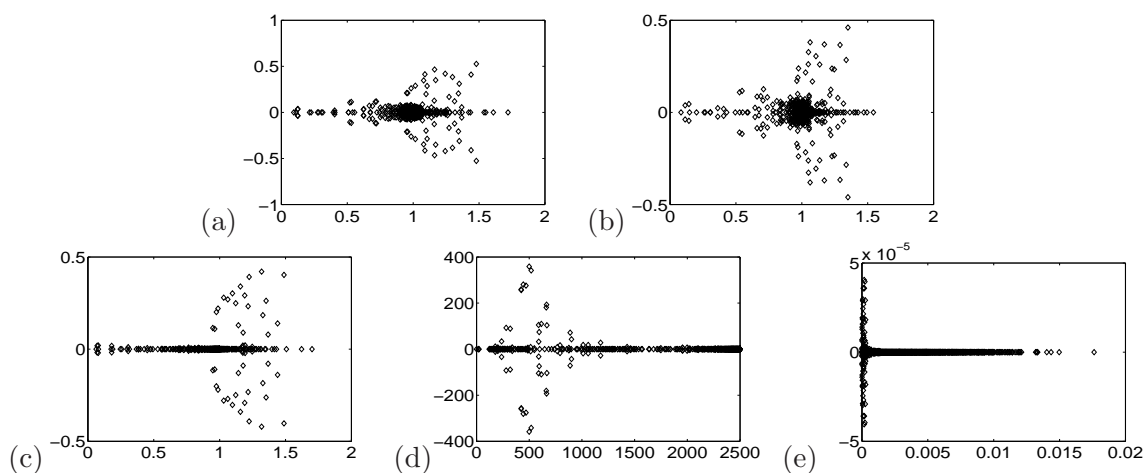


FIG. 7.15 –  $\nu = 0.01$ . Spectre du complément de Schur preconditionné par (a) Elman,  $M_2 = I$ . (b) Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman,  $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE.

Pour une viscosité  $\nu = 0.001$  sur une grille non-structurée  $20 \times 20$  :

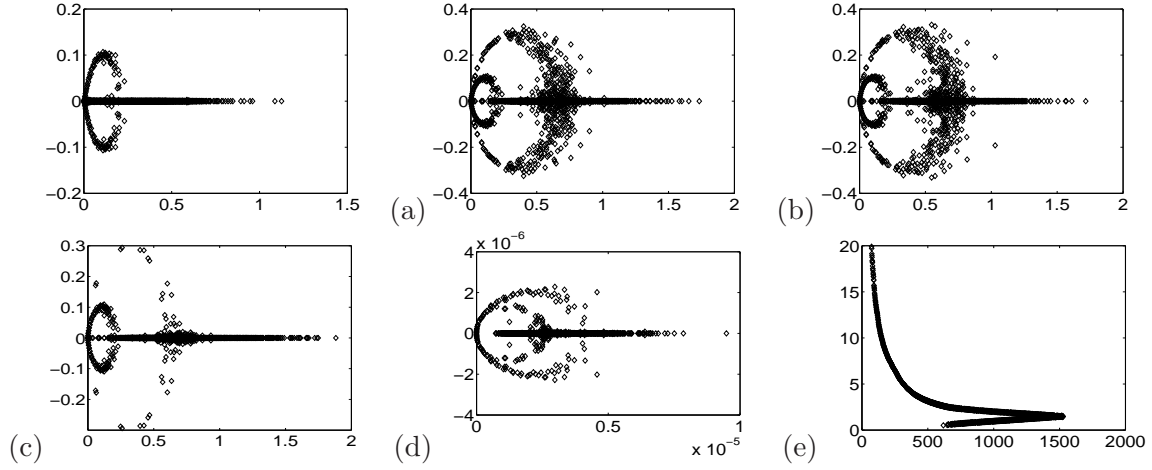


FIG. 7.16 –  $\nu = 0.001$ . En haut à gauche : Spectre du complément de Schur, à comparer aux spectres du (a) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = I$ . (b) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Préconditionneur d’Elman,  $M_2 = X$ . (d) Préconditionneur d’Olshanskii. (e) SIMPLE.

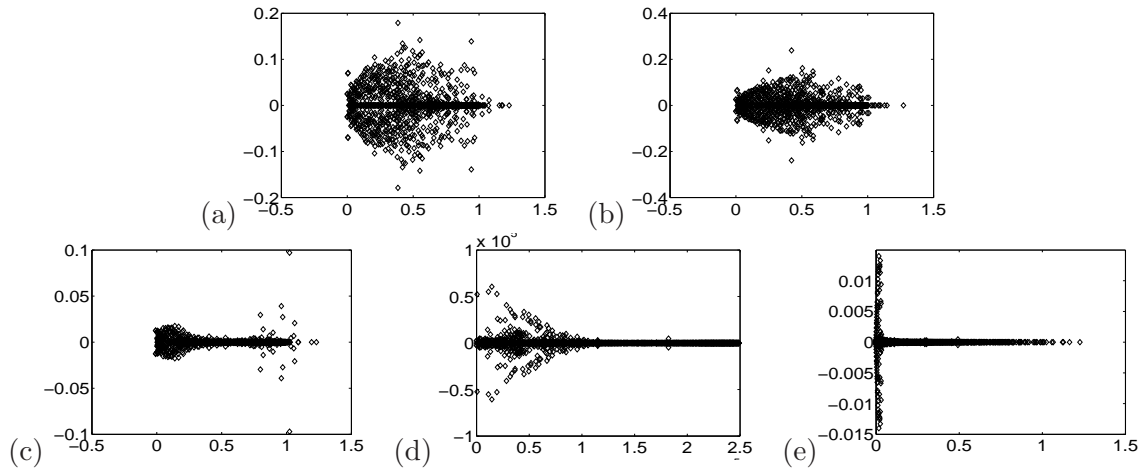


FIG. 7.17 –  $\nu = 0.001$ . Spectre du complément de Schur préconditionné par (a) Elman,  $M_2 = I$ . (b) Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman,  $M_2 = X$ . (d) Olshanskii. (e) SIMPLE.

Problèmes de Stokes pour différentes viscosités sur une grille non-structurée  $20 \times 20$  :

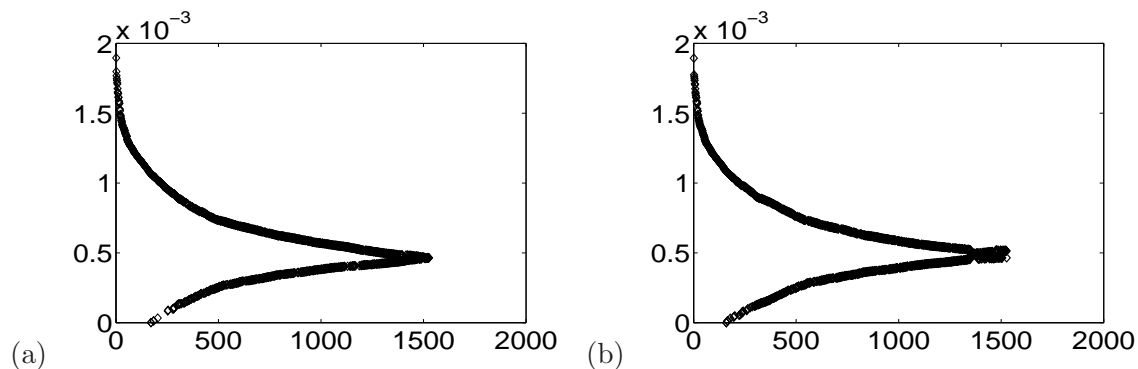


FIG. 7.18 –  $\nu = 1$ . (a) Complément de Schur pour le problème de Stokes. (b) Préconditionneur d'Elman avec  $M_2 = I$  pour le problème de Stokes.

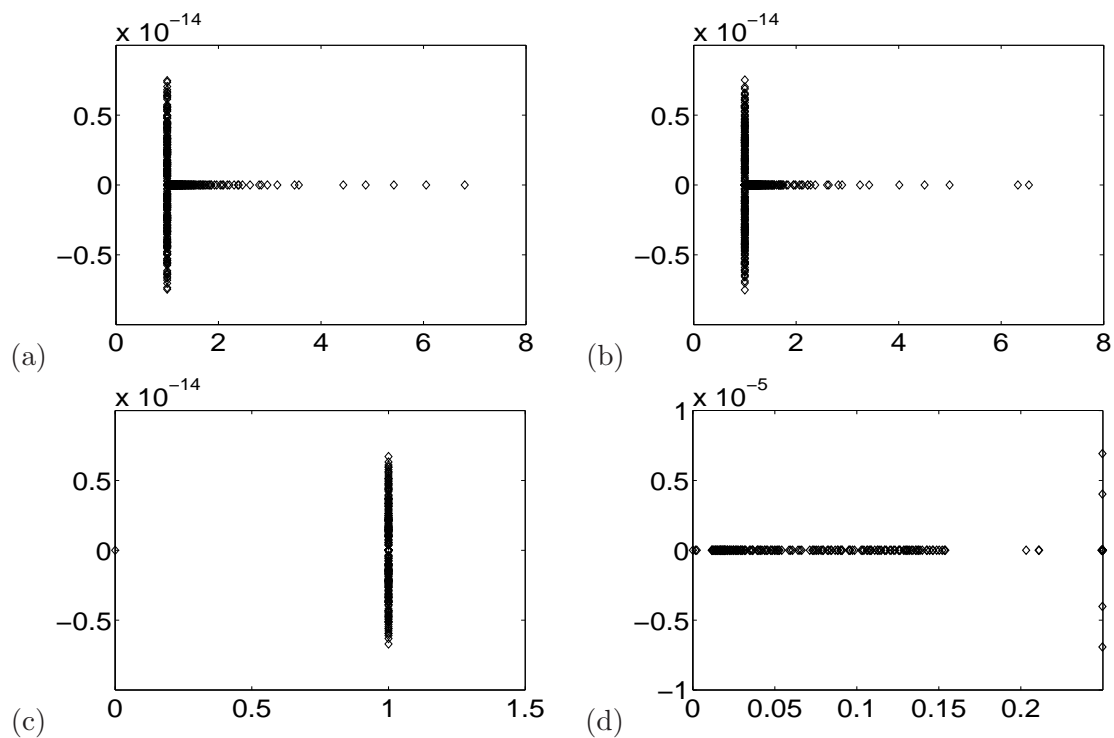


FIG. 7.19 – Spectre du complément de Schur pour le problème de Stokes preconditionné par (a) Elman,  $M_2 = I$ . (b) Elman,  $M_2 = \text{diag}(A)$ . (c) Elman,  $M_2 = X$ . (d) Olshanskii.

### Coût itératif des préconditionneurs et temps de calculs

Les calculs sont faits en Fortran 90 et nous utiliserons dans la première partie les bibliothèques PETSC [11, 12, 13] et MUMPS [80], puis SPARSKIT2 [100] dans la deuxième partie. Les maillages sont des triangulations non-structurées générées par EMC2 [47]. Le domaine de calculs est  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Ainsi, le nombre de Reynolds est égal à  $Re = \frac{1}{\nu}$ .

Le cas test à considérer est le problème de la cavité à paroi défilante avec  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  dont la vitesse de convection est donnée par

$$\mathbf{u}_G = \begin{pmatrix} 2(2y-1)(1-(2x-1)^2) \\ -2(2x-1)(1-(2y-1)^2) \end{pmatrix}$$

et avec les conditions aux limites  $\mathbf{u}(x, 1) = (1, 0)^T$ ,  $\mathbf{u}(x, y) = 0$  sinon. Le second membre est supposé être nul.

Les itérations linéaires sont arrêtées lorsque le critère défini dans la table 7.2 est satisfait avec

$$\text{tol} = 10^{-8}.$$

**Première partie** Nous utilisons les bibliothèques PETSC [11, 12, 13] et MUMPS [80] pour factoriser  $A$  et  $BM_2^{-1}B^T$  par une factorisation complète du type  $LU$ , et la résolution de  $A^{-1}$  et  $\tilde{S}^{-1}$  est directe.

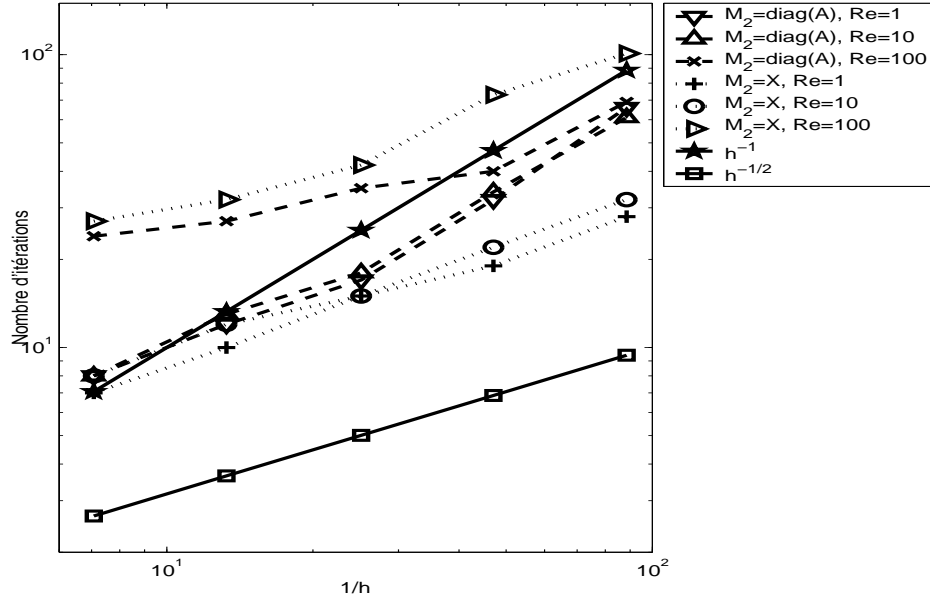
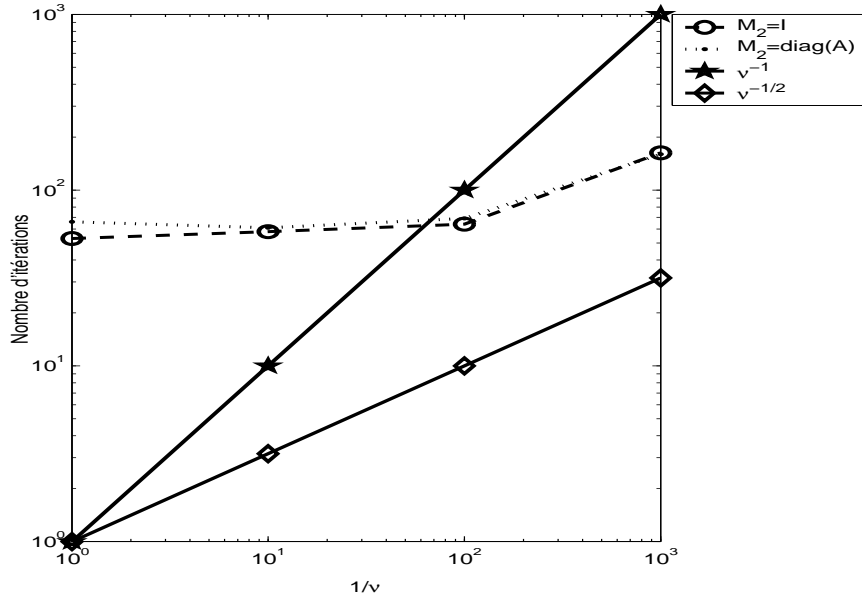
La matrice  $BM_2^{-1}B^T$  est calculée par un produit de matrices creuses : la matrice obtenue est creuse et le caractère creux est le même que celui de la matrice de diffusion classique. Alors, cette matrice est factorisée en utilisant MUMPS. Le produit par  $A^{-1}$  est aussi donné par une factorisation de MUMPS. L'utilisation de la factorisation incomplète donne de bons résultats, mais l'utilisation de solveurs exacts pour  $A$  et  $BM_2^{-1}B^T$  permet de donner une meilleure comparaison avec les résultats d'Elman car ses tests sont faits avec Matlab en utilisant le solveur "backslash".

La table 7.3 montre le coût itératif de l'algorithme du Bicgstab préconditionné par les préconditionneurs SIMPLE et BFBt décrits dans la section 7.3.2. Une itération correspond à deux inversions de  $A$  et à quatre inversions de  $BM_2^{-1}B^T$ . Le nombre maximum d'itérations est fixé à 5000 et 'NC' pour 'Ne Converge pas' signifie que le critère d'arrêt n'est pas satisfait à la 5000ème itération. Les résultats pour le préconditionneur d'Olshanskii ne sont pas présentés dans cette table, car ce préconditionneur n'est pas du tout efficace pour notre schéma en volumes finis : pour une grille  $40 \times 40$  et  $\nu = 1$ , plus de 1000 itérations sont nécessaires pour résoudre le système.



Maillage	Préconditionneur	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$	$\nu = 10^{-4}$
$10 \times 10$	$M_2 = I$	8	9	24	NC	NC
	$M_2 = X$	7	8	27	NC	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	8	8	24	NC	NC
	SIMPLE	41	48	64	587	NC
$20 \times 20$	$M_2 = I$	11	12	27	275	NC
	$M_2 = X$	10	12	32	440	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	12	13	27	178	NC
	SIMPLE	84	94	94	293	NC
$40 \times 40$	$M_2 = I$	17	19	36	207	NC
	$M_2 = X$	15	15	42	NC	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	17	18	35	223	NC
	SIMPLE	171	175	187	278	NC
$80 \times 80$	$M_2 = I$	32	35	44	189	NC
	$M_2 = X$	19	22	73	NC	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	32	34	40	175	NC
	SIMPLE	294	342	346	394	NC
$160 \times 160$	$M_2 = I$	53	58	64	163	NC
	$M_2 = X$	28	32	101	NC	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	66	61	69	160	NC
	SIMPLE	614	814	909	830	NC

TAB. 7.3 – Coût itératif pour le solveur linéaire.


 FIG. 7.20 – Comparaison du coût itératif en fonction de  $1/h$  pour le préconditionneur BFBt.

 FIG. 7.21 – Comparaison du coût itératif en fonction de  $1/\nu$  pour le préconditionneur BFBt.

Le nombre d'itérations du préconditionneur SIMPLE présente de petites variations avec la viscosité mais croît linéairement en  $h^{-1}$ .

Nous avons représenté sur la Fig. 7.20 le nombre d'itérations en fonction de  $1/h$  du préconditionneur d'Elman avec  $M_2 = \text{diag}(A)$  ou  $M_2 = X$  (pour plus de clarté, nous n'avons pas représenté le cas  $M_2 = I$  puisque les résultats sont proches du cas  $M_2 = \text{diag}(A)$ ). Nous observons que le coût itératif de la méthode BFBt préconditionnée augmente lentement en  $h^{-1}$ . Choisir  $M_2 = X$ , la matrice de masse sur la vitesse, conduit à une amélioration en  $h^{-1/2}$  seulement pour de grandes viscosités (plus grande que  $10^{-2}$ ). D'autre part, choisir  $M_2 = \text{diag}(A)$  vise à préconditionner  $A$  et est utile seulement quand le maillage n'est pas suffisamment raffiné (par exemple, pour  $\nu = 10^{-3}$  et pour la grille  $20 \times 20$ ). Puisque notre méthode est une extension du schéma MAC,  $M_2 = I$  montre une performance assez similaire à celle d'Elman [44] dans le cas d'un tourbillon. De plus, on observe sur la Fig. 7.21 que le nombre d'itérations en fonction de  $1/\nu$  ne dépend pas de  $\nu$  pour de grandes viscosités lorsque  $M_2 = I$  et  $M_2 = \text{diag}(A)$  sur une grille non-structurée  $160 \times 160$ . Le cas  $M_2 = X$  n'est pas représenté puisqu'il ne converge pas lorsque  $\nu$  est faible.

**Deuxième partie** D'autre part, nous avons également réalisé ces cas tests grâce à la bibliothèque SPARSKIT2 développée par Saad [100] avec  $\tilde{A} = ILU1(A)$  et  $\widetilde{B\Pi B^T} = ILU1(B\Pi B^T)$ , et aussi  $\tilde{A} = ILU0(A)$  et  $\widetilde{B\Pi B^T} = ILU0(B\Pi B^T)$ , où  $\Pi$  est à remplacer par  $M_2^{-1}$  pour le préconditionneur d'Elman ou la matrice diagonale  $\text{diag}(A)^{-1}$  pour SIMPLE. De plus, nous utilisons la structure creuse CSR et la matrice  $BM_2^{-1}B^T$  est calculée par un produit de matrices creuses. En pratique,  $A$  et  $B\Pi B^T$  sont "inversés" par un BICGSTAB préconditionné par ILU0 ou ILU1, selon le choix de la factorisation. Nous donnons le coût itératif ainsi que le temps nécessaire à la résolution en choisissant  $10^{-16}$  comme critère d'arrêt pour inverser  $B\Pi B^T$ . L'ordinateur utilisé est un Pentium 4 (2 GHz) avec 1Go de RAM. Nous avons de plus testé le préconditionneur  $\tilde{S} = Q$  qui est la matrice de masse sur la pression définie dans la section 7.3.2. Ce qui ressort de cette étude est en accord avec les observations que nous avons faites sur les spectres. Pour une viscosité  $\nu = 1.0$  ou  $\nu = 0.1$ , le préconditionneur d'Elman avec  $M_2 = X$  est globalement le meilleur d'un point de vue coût itératif et temps de calculs. En ce qui concerne le préconditionneur SIMPLE, quand on raffine, c'est de loin le préconditionneur le plus coûteux en temps de calculs. Enfin, pour une viscosité  $\nu = 0.01$  ou  $\nu = 0.001$ , les préconditionneurs d'Elman avec  $M_2 = I$  et  $M_2 = \text{diag}(A)$  sont les meilleurs, avec un léger avantage pour  $M_2 = \text{diag}(A)$ . Enfin, il faut noter que la résolution du

système d'Oseen est plus rapide quand on utilise un préconditionnement de  $A$  et  $BM_2^{-1}B^T$  basé sur une factorisation ILU1 plutôt que ILU0 car le nombre d'itérations pour inverser  $A$  et  $BM_2^{-1}B^T$  est beaucoup plus important avec la factorisation ILU0. Nous n'avons pas évalué les temps de calculs avec PETSC et MUMPS pour les comparer avec ceux de SPARSKIT2.

#### Résidus et coût itératif pour inverser $B\Pi B^T$

La figure 7.22 illustre les résidus à chaque itération de l'algorithme du Bicgstab 7.2 pour une grille triangulaire non-structurée  $80 \times 80$  pour les différents préconditionneurs avec  $\nu = 1.0$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.01$  et  $\nu = 0.001$ . Ensuite, nous donnons dans le tableau 7.8, le nombre d'itérations moyen pour inverser  $B\Pi B^T$  par un Bicgstab préconditionné par ILU1 avec SPARSKIT2 à chaque itération du Bicgstab 7.2. Rappelons que, d'après la table 7.2, on inverse deux fois la matrice  $A$  par itération quelque soit le préconditionneur, tandis que zéro (pour  $\tilde{S} = Q$ ), deux (pour SIMPLE) ou quatre (pour le préconditionneur d'Elman) inversions de  $B\Pi B^T$  sont nécessaires à chaque itération.

#### Coût itératif pour le problème de Navier-Stokes

Enfin, nous donnons dans le tableau 7.9 le nombre d'itérations non-linéaires pour résoudre le problème de Navier-Stokes pour  $\nu = 1$  et  $\nu = 0.1$  avec l'algorithme de la table 7.1 et une précision de  $10^{-8}$  et, entre parenthèses, le nombre moyen d'itérations pour résoudre le problème d'Oseen avec une tolérance de  $10^{-1}$  pour l'algorithme de la table 7.2. Les grilles utilisées sont non-structurées et nous indiquons le pas de chacun de ces maillages. En pratique, l'algorithme de Turek [105] ne semble pas converger pour  $\nu = 0.01$ . D'autre part, puisque le terme convectif est discrétisé par une méthode centrée, il faudrait tenir compte du nombre de Péclet  $\frac{\|\mathbf{u}\|_\infty h}{\nu}$  de telle sorte que celui-ci soit inférieur à 1, ce qui peut s'avérer coûteux.

Maillage	Préconditionneur $\tilde{S}$	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$
$5 \times 5$	$M_2 = I$	6	7	31	NC
	$M_2 = X$	6	7	30	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	5	7	29	NC
	$Q$	30	32	85	NC
	SIMPLE	24	27	98	NC
$10 \times 10$	$M_2 = I$	8	11	29	NC
	$M_2 = X$	8	9	30	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	9	11	26	NC
	$Q$	32	35	92	918
	SIMPLE	51	58	78	773
$20 \times 20$	$M_2 = I$	12	16	30	NC
	$M_2 = X$	11	14	36	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	13	14	30	NC
	$Q$	32	40	100	736
	SIMPLE	97	99	110	391
$40 \times 40$	$M_2 = I$	19	22	<u>39</u>	293
	$M_2 = X$	<u>16</u>	<u>19</u>	55	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	18	21	43	<u>290</u>
	$Q$	34	42	115	749
	SIMPLE	180	215	243	341
$80 \times 80$	$M_2 = I$	33	44	55	<u>299</u>
	$M_2 = X$	<u>22</u>	<u>28</u>	100	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	32	41	<u>49</u>	301
	$Q$	57	46	120	924
	SIMPLE	399	464	807	543

TAB. 7.4 – Nombre d'itérations avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2.

Maillage	Préconditionneur $\tilde{S}$	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$
$5 \times 5$	$M_2 = I$	0.1	0.1	0.1	NC
	$M_2 = X$	0.1	0.1	0.2	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	0.1	0.1	0.2	NC
	$Q$	0.1	0.1	0.2	NC
	SIMPLE	0.1	0.1	0.3	NC
$10 \times 10$	$M_2 = I$	0.8	0.9	1	NC
	$M_2 = X$	0.9	0.9	1	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	0.9	0.9	1	NC
	$Q$	1	1	2	18
	SIMPLE	2	2	2	21
$20 \times 20$	$M_2 = I$	11	13	15	NC
	$M_2 = X$	12	13	18	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	12	13	17	NC
	$Q$	17	19	28	129
	SIMPLE	48	50	40	114
$40 \times 40$	$M_2 = I$	170	<u>185</u>	<u>276</u>	951
	$M_2 = X$	<u>164</u>	<u>185</u>	371	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	178	195	297	941
	$Q$	177	204	442	<u>761</u>
	SIMPLE	872	1050	1127	768
$80 \times 80$	$M_2 = I$	2780	3439	4680	11856
	$M_2 = X$	<u>2303</u>	2667	7405	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	2926	3462	<u>4481</u>	<u>11481</u>
	$Q$	2483	<u>2483</u>	6268	13881
	SIMPLE	18552	21758	45372	17406

TAB. 7.5 – Temps en seconde(s) avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2.

Maillage	Préconditionneur $\tilde{S}$	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$
$5 \times 5$	$M_2 = I$	6	7	31	NC
	$M_2 = X$	6	7	30	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	5	7	29	NC
	$Q$	28	32	85	NC
	SIMPLE	24	27	107	NC
$10 \times 10$	$M_2 = I$	8	11	29	NC
	$M_2 = X$	8	9	30	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	9	11	26	NC
	$Q$	33	35	92	916
	SIMPLE	50	51	82	734
$20 \times 20$	$M_2 = I$	12	15	30	NC
	$M_2 = X$	11	14	37	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	13	14	30	NC
	$Q$	32	40	99	649
	SIMPLE	98	100	109	393
$40 \times 40$	$M_2 = I$	20	22	40	<u>328</u>
	$M_2 = X$	<u>16</u>	<u>19</u>	56	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	18	22	<u>39</u>	NC
	$Q$	33	42	122	667
	SIMPLE	194	215	320	364
$80 \times 80$	$M_2 = I$	33	41	55	296
	$M_2 = X$	<u>20</u>	<u>28</u>	99	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	34	38	<u>51</u>	<u>262</u>
	$Q$	48	44	117	803
	SIMPLE	350	395	NC	615

TAB. 7.6 – Nombre d'itérations avec la factorisation ILU0 de SPARSKIT2.

Maillage	Préconditionneur $\tilde{S}$	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$
$5 \times 5$	$M_2 = I$	0.1	0.1	0.2	NC
	$M_2 = X$	0.1	0.1	0.2	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	0.1	0.1	0.2	NC
	$Q$	0.1	0.1	0.2	NC
	SIMPLE	0.2	0.2	0.4	NC
$10 \times 10$	$M_2 = I$	1	1	1	NC
	$M_2 = X$	1	1	1	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	1	1	1	NC
	$Q$	1	1	2	8
	SIMPLE	2	2	3	16
$20 \times 20$	$M_2 = I$	15	17	27	NC
	$M_2 = X$	15	18	33	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	16	17	28	NC
	$Q$	22	27	58	102
	SIMPLE	71	75	77	111
$40 \times 40$	$M_2 = I$	234	260	454	1785
	$M_2 = X$	<u>217</u>	<u>249</u>	595	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	236	267	<u>442</u>	NC
	$Q$	232	283	831	1426
	SIMPLE	1356	1520	2481	<u>1400</u>
$80 \times 80$	$M_2 = I$	3830	4586	6971	23041
	$M_2 = X$	<u>3049</u>	<u>3717</u>	11162	NC
	$M_2 = \text{diag}(A)$	4216	4696	<u>6678</u>	<u>20834</u>
	$Q$	3204	3436	9247	34211
	SIMPLE	25905	34711	NC	42393

TAB. 7.7 – Temps en seconde(s) avec la factorisation ILU0 de SPARSKIT2.



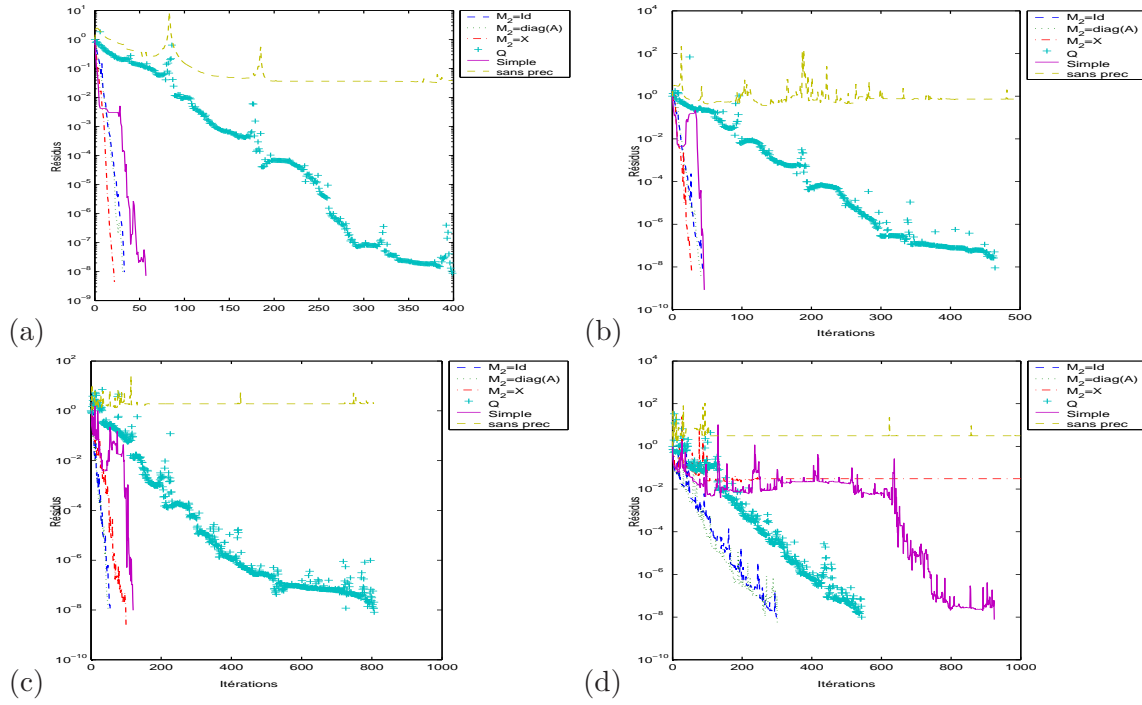


FIG. 7.22 – Résidus pour un maillage  $80 \times 80$  non-structuré (a)  $\nu = 1$  (b)  $\nu = 0.1$  (c)  $\nu = 0.01$  (d)  $\nu = 0.001$ .

Préconditionneur	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$	$\nu = 10^{-2}$	$\nu = 10^{-3}$
$M_2 = I$	2329	2285	2323	2259
$M_2 = X$	2118	2129	2135	2324
$M_2 = \text{diag}(A)$	2355	2245	2284	2105
SIMPLE	1147	1101	1080	1120

TAB. 7.8 – Nombre d'itérations moyen pour inverser la matrice  $B\Pi B^T$  sur un maillage non-structuré  $80 \times 80$  avec la factorisation ILU1 de SPARSKIT2.

## 7.5 Conclusion

Que ce soit pour le problème d'Oseen ou pour le problème de Navier-Stokes, nous observons une convergence d'ordre deux pour la vitesse sur des maillages triangulaires non-structurés et sur des maillages avec un raffinement local non-conforme. La pression et la vorticité convergent, quant à elles, avec un ordre d'au moins 1. Nous avons également testé les performances de différents préconditionneurs, utilisés en éléments finis, que nous avons

Maillage	h	$\nu = 1$	$\nu = 10^{-1}$
$10 \times 10$	0.1414	8 (2)	12 (2)
$20 \times 20$	0.07535	22 (3)	16 (3)
$40 \times 40$	0.03978	17 (5)	15 (4)
$80 \times 80$	0.02125	15 (7)	20 (7)

TAB. 7.9 – Nombre d’itérations non-linéaires pour résoudre le problème de Navier-Stokes (Nombre d’itérations moyen pour résoudre le problème d’Oseen avec une tolérance de  $10^{-1}$  à chaque itération non-linéaire).

adaptés à la méthode DDFV. Le préconditionneur BFBt d’Elman semble être une boîte noire robuste et très efficace pour résoudre le problème de Navier–Stokes linéarisé. Cependant, puisque le terme de convection est discrétisé par un schéma centré, la convergence de la méthode est limitée par le nombre de Péclet, ce qui signifie qu’il est nécessaire de raffiner dès qu’on augmente le nombre de Reynolds, ce qui est très coûteux. En perspective, il faudrait réfléchir à une stratégie adaptée à des nombres de Reynolds plus élevés pour résoudre le problème de Navier-Stokes avec DDFV. Dans un premier temps, on pourrait tester d’autres algorithmes non-linéaires et si besoin, les associés à d’autres préconditionneurs.



# Perspectives

En conclusion, nous avons développé une méthode de volumes finis qui a la particularité de s'appliquer à des maillages non structurés et non conformes. Nous nous sommes intéressés à des problèmes variés tels que le problème Div-Rot (sous-jacent pour l'étude des équations de la mécanique des fluides), les problèmes de Stokes et Navier-Stokes. De plus, nous avons étudié le cas particulier des domaines polygonaux non-convexes avec des solutions singulières dans le cadre du problème de Laplace. Enfin, nous avons adapté à DDFV des préconditionneurs issus des méthodes d'éléments finis.

En perspective, il reste à établir la condition inf-sup et l'analyse de convergence du schéma de Stokes (puis Navier-Stokes) avec les conditions aux limites standard. D'autre part, nous n'avons pas réussi à résoudre le problème de Navier-Stokes pour des nombres de Reynolds élevés. A ce sujet, il pourrait être intéressant d'étudier le comportement d'autres algorithmes non linéaires. Enfin, l'extension en 3D n'est pas immédiate et il est nécessaire de refaire une étude complète, pas à pas, de chacun des problèmes traités jusqu'à présent. Pour cela, on pourra se référer aux travaux de Charles Pierre [94] qui étend, avec succès, le schéma DDFV du problème de Laplace en 3D.



# Bibliographie

- [1] G. ACOSTA and R.G. DURÁN, *The maximum angle condition for mixed and nonconforming elements : application to the Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., **37**, 18–36, 1999.
- [2] L. AFRAITES, *Rapport de stage de DEA de l'université Paris-Sud Orsay*, sous la direction de P. Omnes, 2003.
- [3] B. ANDREIANOV, F. BOYER and F. HUBERT, *Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions type elliptic problems on general 2D meshes*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, **23** (1), 145–195, 2006.
- [4] M. AMARA, D. CAPATINA-PAPAGHIUC, E. CHACÓN-VERA and D. TRUJILLO, *Vorticity-velocity-pressure formulation for Navier-Stokes equations*, Comput. Vis. Sci., **6**, 47–52, 2004.
- [5] M. AMARA, E. CHACÓN-VERA and D. TRUJILLO, *Vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes equations*, Math. Comput., **73**, 1673–1697, 2004.
- [6] T. APEL and S. NICAISE, *The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges*, Math. Meth. Appl. Sci., **21**, 519–549, 1998.
- [7] M. AZAÏEZ, C. BERNARDI and N. CHORFI, *Spectral discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Navier-Stokes equations*, Numer. Math., **104**, 1–26, 2006.
- [8] I. BABUŠKA and A.K. AZIZ, *On the angle condition in the finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., **13**, 214–226, 1976.
- [9] I. BABUŠKA, R.B. KELLOGG and J. PITKÂRANTA, *Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements*, Numer. Math., **33**, 447–471, 1979.

- [10] I. BABUŠKA and M.B. ROSENZWEIG, *A finite element scheme for domains with corners*, Numer. Math., **20**, 1–21, 1972.
- [11] S. BALAY, K. BUSCHELMAN, W.D. GROPP, D. KAUSHIK, M.G. KNEPLEY, L. CURFMAN McINNES, B.F. SMITH and H. ZHANG, PETSc Web page, <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2001.
- [12] S. BALAY, K. BUSCHELMAN, V. ELJKHOUT, W.D. GROPP, D. KAUSHIK, M.G. KNEPLEY, L. CURFMAN McINNES and B.F. SMITH and H. ZHANG, *PETSc Users Manual*, ANL-95/11 - Revision 2.1.5, Argonne National Laboratory, 2004.
- [13] S. BALAY, W.D. GROPP, L. CURFMAN McINNES and B.F. SMITH, *Efficient Management of Parallelism in Object Oriented Numerical Software Libraries*, Modern Software Tools in Scientific Computing, E. Arge and A.M. Bruaset and H.P. Langtangen, Birkhäuser Press, 1997.
- [14] C. BĂCUTĂ, V. NISTOR and L. ZIKATANOV, *Improving the rate of convergence of "High order finite elements" on polyhedra I : a priori estimates*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **26** (6), 613–639, 2005.
- [15] R.E. BANK, D.J. ROSE, *Some error estimates for the box method*, SIAM J. Numer. Anal., **24**, 777–787, 1987.
- [16] C. BÈGUE, C. CONCA, F. MURAT and O. PIRONNEAU, *Les équations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression*, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar **IX**, 179–264, 1988.
- [17] C. BERNARDI and N. CHORFI, *Spectral discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., **44** (2), 826–850, 2006.
- [18] C. BERNARDI and F. HECHT, *More pressure in the finite element discretization of the Stokes Problem*, Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, **34** (5), 953–980, 2000.
- [19] P. BLANC, R. EYMARD and R. HERBIN, *A staggered finite volume scheme on general meshes for the generalized Stokes problem in two space dimensions*, Int. J. Finite Volumes, **2** (1), (2005).

- [20] P. BLANC, R. EYMARD and R. HERBIN, *An error estimate for finite volume methods for the Stokes equations on equilateral triangular meshes*, Numer. Meth. for Partial Differential Equations, **20** (6), 907–918, 2004.
- [21] J.H. BRAMBLE and J.E. PASCIAK, *A new approximation technique for div-curl systems*, Math. Comp., **73**, 1739–1762, 2004.
- [22] J.H. BRAMBLE and J.E. PASCIAK and A.T. VASSILEV, *Uzawa type algorithms for nonsymmetric saddle point problems*, Math. Comput., **69** (230), 667–689, 2000.
- [23] Z. CAI, *On the finite volume-element method*, Numer. Math., **58**, 713–735, 1991.
- [24] J.C. CAMPBELL, J.M. HYMAN and M.J. SHASHKOV, *Mimetic finite difference operators for second-order tensors on unstructured grids*, Comput. Math. Appl., **44**, 157–173, 2002.
- [25] C. CHAINAIS-HILLAIRET, *Finite volume schemes for two dimensional drift-diffusion and energy-transport models*, Finite Volumes for Complex Applications IV, F. Benkhaldoun, D. Ouazar and S. Raghay eds., Hermes Science Publishing, 13–22, 2005.
- [26] P. CHATZIPANTELIDIS, *A finite volume method based on the CROUZEIX-RAVIART element for elliptic PDE's in two dimensions*, Numer. Math., **82**, 409–432, 1999.
- [27] P. CHATZIPANTELIDIS, *Finite volume methods for elliptic PDE's : a new approach*, Math. Mod. Numer. Anal., **36**, 307–324, 2002.
- [28] P. CHATZIPANTELIDIS and R.D. LAZAROV, *Error estimates for a finite volume element method for elliptic PDEs in nonconvex polygonal domains*, SIAM J. Numer. Anal., **42** (5), 1932–1958, 2005.
- [29] S. CHOUDHURY and R.A. NICOLAIDES, *Discretization of incompressible vorticity-velocity equations on triangular meshes*, Int. J. Numer. Methods Fluids, **11**, 823–833, 1990.
- [30] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems, Studies in mathematics and its applications*, North Holland, 1978.
- [31] Y. COUDIERE, J.-P. VILA and P. VILLEDIEU, *Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem*, Math. Model. Numer. Anal., **33**, 493–516, 1999.
- [32] M. CROUZEIX and P.A. RAVIART, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations*, RAIRO Anal. Numer., **7**, 33–76, 1973.



- [33] M. DAUGE, *Elliptic boundary value problems on corner domains, Lecture notes in mathematics*, **1341**, Springer, Berlin, 1988.
- [34] S. DELCOURTE, *A discrete duality finite volume for elliptic problems with corner singularities*, en préparation 2007.
- [35] S. DELCOURTE, K. DOMELEVO and P. OMNES, *Discrete duality finite volume method for second order elliptic problems*, Proceedings Finite Volumes for Complex Applications IV, 447–458, (F. Benkhaldoun, D. Ouazar and S. Raghay eds., Hermes Science publishing, 2005).
- [36] S. DELCOURTE, K. DOMELEVO and P. OMNES, *A discrete duality finite volume approach to Hodge decomposition and div-curl problems on almost arbitrary two-dimensional meshes*, SIAM J. Numer. Anal., **45** (3), 1142–1174, 2007.
- [37] S. DELCOURTE and D. JENNEQUIN, *Preconditioning Navier–Stokes problems discretized by discrete duality finite volume schemes*, en préparation 2007.
- [38] S. DELCOURTE and P. OMNES, *A finite volume method for the Stokes problem in two dimensions*, (soumis 2007).
- [39] K. DJADEL, S. NICAISE and J. TABKA, *Some refined finite volume methods for elliptic problems with corner singularities*, Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin and O. Kröner eds., Hermes Science publishing, 729–736, 2002.
- [40] K. DOMELEVO and P. OMNES, *A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, Math. Model. Numer. Anal., **39**, 1203–1249, 2005.
- [41] F. DUBOIS, *Vorticity-velocity-pressure formulation for the Stokes problem*, Math. Meth. Appl. Sci., **25**, 1091–1119, 2002.
- [42] F. DUBOIS, M. SALAÜN and S. SALMON, *First vorticity-velocity-pressure numerical scheme for the Stokes problem*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., **192** (44-46), 4877–4907, 2003.
- [43] F. DUBOIS, M. SALAÜN and S. SALMON, *Vorticity-velocity-pressure and stream function-vorticity formulations for the Stokes problem*, J. Math. Pures Appl., **82** (11), 1395–1451, 2003.
- [44] H.C. ELMAN, *Preconditioning for the steady-state Navier-Stokes equations with low viscosity*, SIAM J. Sci. Comput., **20**, 1299–1316, 1999.

- [45] H.C. ELMAN, V.E. HOWLE, J. SHADID, R. SHUTTLEWORTH and R. TUMINARO, *Block preconditioners based on approximate commutators*, SIAM J. Sci. Comput., **27** (5), 1651–1668, 2006.
- [46] H.C. ELMAN and D. SILVESTER, *Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for Navier-Stokes equations*, SIAM J. Sci. Comput., **17**, 33–46, 1996.
- [47] EMC2 Web Page, "[http://pauillac.inria.fr/cdrom\\_a\\_graver/www/emc2/fra.html](http://pauillac.inria.fr/cdrom_a_graver/www/emc2/fra.html)".
- [48] R. EYMARD, T. GALLOUËT and R. HERBIN, *Finite volumes methods*, Handbook of numerical analysis, **7**, 723–1020, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds., 2000.
- [49] R. EYMARD and R. HERBIN, *A staggered finite volume scheme on general meshes for the Navier-Stokes equations in two space dimensions*, Int. J. Finite Volumes, **2** (1), 2005.
- [50] R. EYMARD and R. HERBIN, *A finite volume scheme on general meshes for the steady Navier-Stokes equations in two space dimensions*, Numerical mathematics and advanced applications, Springer, Berlin, 2004.
- [51] R. EYMARD, J.C. LATCHÉ and R. HERBIN, *On a stabilized colocated finite volume scheme for the Stokes problem*, Math. Model. Numer. Anal., **40**, 501–527, 2006.
- [52] R. EYMARD, R. HERBIN, and J.C. LATCHÉ, *Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2 or 3D meshes*, SIAM J. Numer. Anal., **45** (1), 1–36, 2007.
- [53] V. GIRAULT, *Incompressible Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations with Nonstandard Boundary Conditions in  $\mathbb{R}^3$* , Math. Comput., **183**, 55–74, 1988.
- [54] V. GIRAULT and P.A. RAVIART, *Finite element approximation for Navier-Stokes equations*, Springer, 1986.
- [55] R. GLOWINSKI, *Numerical methods for fluids (Part3)*, Handbook of numerical analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland, **IX**, 2003.
- [56] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and studies in Mathematics, **21**, Pitman, Boston, 1985.
- [57] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Research Notes in Applied Mathematics, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds., Springer-Verlag, Masson, 1992.
- [58] F.H. HARLOW and F.E. WELCH, *Numerical calculations of time dependent viscous incompressible flow of fluids with a free surface*, Phys. Fluids, **8**, 2182–2189, 1965.

- [59] S. HEIB, *Nouvelles discrétisations non structurées pour des écoulements de fluides à incompressibilité renforcée*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, France, 2002.
- [60] B. HEINRICH, *The box method for elliptic interface problems on locally refined meshes*, in : W. Hackbush and al. eds., *Adaptative methods-algorithm, theory and Appl.*, Notes Numer. Fluid. Mech., **46**, 177–186, 1994.
- [61] F. HERMELINE, *A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes*, J. Comput. Phys., **160**, 481–499, 2000.
- [62] X. Hu and R.A. NICOLAIDES, *Covolume techniques for anisotropic media*, Numer. Math., **61**, 215–234, 1992.
- [63] Y.H. HWANG, *Calculations of incompressible flow on a staggered triangular grid, part mathematical formulation*, Numer. Heat Transfer, Part B, **27**, 323–336, 1995.
- [64] J.M. HYMAN and M. SHASHKOV, *Natural discretizations for the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids*, Computers Math. Applic., **33**, 81–104, 1997.
- [65] J.M. HYMAN and M. SHASHKOV, *Adjoint operators for the natural discretizations for the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids*, Appl. Numer. Math., **25**, 413–442, 1997.
- [66] J.M. HYMAN and M. SHASHKOV, *The orthogonal decomposition theorems for mimetic finite difference methods*, SIAM J. Numer. Anal., **36**, 788–818, 1999.
- [67] J.M. HYMAN and M. SHASHKOV, *Mimetic discretizations for Maxwell's equations*, J. Comput. Phys., **151**, 881–909, 1999.
- [68] J.M. HYMAN, J. MOREL, M. SHASHKOV and S. STEINBERG, *Mimetic finite difference methods for diffusion equations*, Comput. Geosci., **6**, 333–352, 2002.
- [69] P. JAMET, *Estimations d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés*, RAIRO Analyse numérique, **10**, 43–61, 1976.
- [70] D. JENNEQUIN, *Calculs d'écoulements extérieurs incompressibles*, thèse de l'université du Littoral Côte d'Opale, 2005.
- [71] D. KAY, D. LOGHIN and A. WATHEN, *A preconditioner for the steady-state Navier-Stokes equation*, SIAM J. Sci. Comput., **24**, 237–256, 2002.
- [72] V.A. KONDRAT'EV, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, Trans. Mosc. Mat. Soc., **16**, 227–313, (1967).

- [73] A. KUFNER and A.-M. SÖNDING, *Some applications of weighted Sobolev spaces*, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [74] P. LAASONEN, *On the degree of convergence of discrete approximations for the solutions of the Dirichlet problem*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I., **246** (19), 1957.
- [75] P.-L. LIONS, *Mathematical topics in fluid mechanics, Vol. 1 : Incompressible models*, Oxford University press, Oxford, UK, 1996.
- [76] F.-S. LIEN, *A pressure-based unstructured grid for all-speed flows*, Int. J. Numer. Methods Fluids, **33** (3), 355–374, 2000.
- [77] K. LIPNIKOV, J. MOREL and M. SHASHKOV, *Mimetic finite difference methods for diffusion equations on non-orthogonal non-conformal meshes*, J. Comput. Phys., **199**, 589–597, 2004.
- [78] K. MAHESH, G. CONSTANTINESCU and P. MOIN, *A numerical method for large eddy simulation in complex geometries*, J. Comput. Phys., **197** (1), 215–240, 2004.
- [79] M. MARION and R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis **VI**, North-Holland, Amsterdam, 503–689, 1998.
- [80] MUMPS Web Page, "<http://mumps.enseiht.fr/index.html>".
- [81] B. NIČENO, *A three dimensional finite volume method for incompressible Navier-Stokes equations on unstructured staggered grids*, In P. Wesseling, E. Oñate and J. Périaux, editors, ECCOMAS CFP 2006, 2006.
- [82] R.A. NICOLAIDES, *Direct discretization of planar div-curl problems*, SIAM J. Numer. Anal., **29**, 32–56, 1992.
- [83] R.A. NICOLAIDES, T.A. PORSHING and C.A. HALL, *Covolume methods in computational fluid dynamics*, Computational fluid dynamics review (M. Hafez and K. Oshma ed., John Wiley and sons), 279–299, 1995.
- [84] R.A. NICOLAIDES and D.-Q. WANG, *Convergence analysis of a covolume scheme for Maxwell's equations in three dimensions*, Math. Comput., **67**, 947–963, 1998.
- [85] R.A. NICOLAIDES and W. XIAONAN, *Covolume solutions of three-dimensional div-curl equations*, SIAM J. Numer. Anal., **34** (6), 2195–2203, 1997.
- [86] R.A. NICOLAIDES and D.-Q. WANG, *A higher-order covolume method for planar div-curl problems*, Int. J. Numer. Methods Fluids, **31** (1), 299–308, 1999.

- [87] M.A. OLSHANSKII, *A low order finite element method for the Navier-Stokes equations of steady incompressible flow : a stabilization issue and iterative methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng, **191**, 5515–5536, 2002.
- [88] M.A. OLSHANSKII and A. REUSKEN, *Navier–Stokes equations in rotation form : A robust multigrid solver for the velocity problem*, SIAM J. Sci. Comput., **23** (5), 1683–1706, 2002.
- [89] M.A. OLSHANSKII and Y.V. VASSILEVSKI, *Pressure Schur complement preconditioners for the discrete Oseen problem*, (submitted in J. Sci Comput.2007).
- [90] F. PAN and A. ACRIVOS, *Steady flows in rectangular cavities*, J. Fluid Mech., **28**, 643–655, 1967.
- [91] S.V. PATANKAR, *Numerical heat transfer and fluid flow, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences*, Washington - New York - London : Hemisphere Publishing Corporation ; New York etc. : McGraw-Hill Book Company. XIII, 1980.
- [92] B. PEROT, *Conservation properties of unstructured staggered mesh schemes*, J. Comput. Phys., **159** (1), 58–89, 2000.
- [93] S. PERRON, S. BOIVIN and J.-M. HÉRARD, *A finite volume method to solve the 3D Navier-Stokes equations on unstructured colocated meshes*, Comput. & Fluids, **33** (10), 1305–1333, 2004.
- [94] C. PIERRE, *Modélisation et simulation de l’activité électrique du cœur dans le thorax, analyse numérique et méthodes de volumes finis*, Thèse de l’université de Nantes, 2005.
- [95] M.M.J. PROOT and M.I. GERRTISMA, *Least-Squares spectral elements applied to the Stokes problem*, J. Comput. Phys., **181**, 454–477, 2002.
- [96] S. RAMADHYANI and S. V. PATANKAR, *Solution of the Poisson equation : Comparison of the Galerkin and control-volume methods*, Int. J. for Numer. Meth. in Eng., **15**, 1395–1418, 1980.
- [97] G. RAUGEL, *Résolution numérique par une méthode d’éléments finis du problème de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone non convexe*, C. R. Acad. Sc. Paris, **286**, 791–794, 1978.
- [98] P.-A. RAVIART and J.-M. THOMAS, *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, Mathematical aspects of the finite element method, I. Galligani and E. Magenes, eds., Lecture Notes in Math., **606**, Springer-Verlag, New-York, 292–315, 1977.

- [99] C.M. RHIE and W.L. CHOW, *Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation*, AIAA J., **21**, 1525–1532, 1983.
- [100] Y. SAAD, SPARSKIT2 Web Page, <http://www-users.cs.umn.edu/saad/>.
- [101] M. SAHIN and R.G. OWENS, *A novel fully-implicit finite volume method applied to the lid-driven cavity problem. I. High Reynolds number flow calculations*, Intern. J. Numer. Methods Fluids, **42** (1), 57–77, 2003.
- [102] P.N. SHANKAR, *The eddy structure in Stokes flow in a cavity*, J. Fluid Mech., **250**, 371–383, 1993.
- [103] D. SILVESTER, H.C. ELMAN, D. KAY and A. WATHEN, *Efficient preconditioning of the linearized Navier-Stokes equations for incompressible flow*, J. Comput. Appl. Math., **128**, 261–279, 2001.
- [104] G. STRANG, *Variational crimes in the finite element method*, The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations, A.K. Aziz ed., Academic Press, New York, 689–710, 1972.
- [105] S. TUREK, *Efficient solvers for incompressible flow problems*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, **6**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [106] D. VIDOVIĆ, A. SEGAL and P. WESSELING, *A superlinearly convergent finite volume method for the incompressible Navier–Stokes equations on staggered unstructured grids*, J. Comput. Phys., **198** (1), 159–177, 2004.
- [107] L.B. WAHLBIN, *On the sharpness of certain local estimates for  $\mathring{H}^1$  projections into finite element spaces : influence of a reentrant corner*, Math. Comp., **42** (165), 1–8, 1984.
- [108] P. WESSELING, A. SEGAL and C.G.M. KASSELS, *Computing flows on general three-dimensional nonsmooth staggered grids*, J. Comput. Phys., **149** (2), 333–362, 1999.
- [109] D.L. YOUNG, S.J. JANE, C.M. FAN, K. MURUGESAN and C.C. TSAI, *The method of fundamental solutions for 2D and 3D stokes problems*, Journal of Computational Physics, **211** (1), 1–8, 2006.
- [110] D.L. YOUNG, C.C. TSAI, T.I. ELDHO and A.H.D. CHENG, *Solution of Stokes flow using an iterative DRBEM based on compactly-supported, positive-definite radial basis function*, Computers and Mathematics with applications, **43**, 607–619, 2002.

- [111] X.K. ZHANG, K-C KWON and S-K YOUN, *The least-squares meshfree method for the steady incompressible viscous flow*, Journal of Computational Physics, **206** (1), 182–207, 2005.

## RÉSUMÉ

Le but de cette thèse est de développer une méthode de volumes finis qui s'applique à une classe de maillages beaucoup plus grande que celle des méthodes classiques, limitées par des conditions d'orthogonalité très restrictives. On construit des opérateurs différentiels discrets agissant sur les trois maillages décalés nécessaires à la construction de la méthode. Ces opérateurs vérifient des propriétés discrètes analogues à celles des opérateurs continus. La méthode est tout d'abord appliquée au problème Divergence-Rotationnel qui peut être considéré comme une brique du problème de Stokes. Ensuite, le problème de Stokes est traité avec diverses conditions aux limites. Par ailleurs, il est bien connu que lorsque le domaine est polygonal et non-convexe, l'ordre de convergence des méthodes numériques se dégrade. Par conséquent, nous avons étudié dans quelle mesure un raffinement local approprié restaure l'ordre de convergence optimal pour le problème de Laplace. Enfin, nous avons discrétisé le problème non-linéaire de Navier-Stokes, en utilisant la formulation rotationnelle du terme de convection, associée à la pression de Bernoulli. Par un algorithme itératif, nous sommes amenés à résoudre un problème de point-selle à chaque itération, pour lequel nous testons quelques préconditionneurs issus des éléments finis, que l'on adapte à notre méthode. Chaque problème est illustré par des cas tests numériques sur des maillages arbitraires, tels que des maillages fortement non-conformes.

**Mots clés :** volumes finis, dualité discrète, singularités de coin, mécanique des fluides, préconditionneurs, point-selle, maillages non-conformes.

## "DEVELOPMENT OF FINITE VOLUME METHODS FOR FLUID DYNAMICS"

## ABSTRACT

We aim to develop a finite volume method which applies to a greater class of meshes than other finite volume methods, restricted by orthogonality constraints. We build discrete differential operators over the three staggered tessellations needed for the construction of the method. These operators verify some analogous properties to those of the continuous operators. At first, the method is applied to the Div-Curl problem, which can be viewed as a building block of the Stokes problem. Then, the Stokes problem is dealt with various boundary conditions. It is well known that when the computational domain is polygonal and non-convex, the order of convergence of numerical methods is deteriorated. Consequently, we have studied how an appropriate local refinement is able to restore the optimal order of convergence for the laplacian problem. At last, we have discretized the non-linear Navier-Stokes problem, using the rotational formulation of the convection term, associated to the Bernoulli pressure. With an iterative algorithm, we are led to solve a saddle-point problem at each iteration. We give a particular interest to this linear problem by testing some preconditioners issued from finite elements, which we adapt to our method. Each problem is illustrated by numerical results on arbitrary meshes, such as strongly non-conforming meshes.

**Key words :** finite volumes, discrete duality, corner singularities, fluids dynamics, preconditioners, saddle-point, non-conforming meshes.